Εννοιολογικές μεταφορές στο γνωστικό δίπολο Γεωμετρία-Άλγεβρα: το πρόσημο του γινομένου αριθμών μέσα από τον πολλαπλασιασμό ευθύγραμμων τμημάτων.

Αναστάσιος Σωτηράκης, Υποψ. Δρ.
Εργαστήριο Μαθηματικών, Διδακτικής και Πολυμέσων,
ΠΤΔΕ, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Δημοκρατίας 1, 85100, Ρόδος
asotirakis@aegean.gr

Ευγένιος Αυγερινός
Εργαστήριο Μαθηματικών, Διδακτικής και Πολυμέσων,
ΠΤΔΕ, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Δημοκρατίας 1, 85100, Ρόδος
eavger@aegean.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο άρθρο αυτό παρουσιάζεται μέρος μιας εργασίας με στόχο τον γεωμετρικό ορισμό του γινομένου ευθυγράμμων τμημάτων και την απόδειξη του κανόνα προσήμου και αποτελεί μια προσιτή και πρωτότυπη εννοιολογική μεταφορά στο δίπολο Γεωμετρία-Άλγεβρα. Το δεύτερο βιβλίο των στοιχείων του Ευκλείδη περιέχει και εφαρμογή της γεωμετρίας στην άλγεβρα η οποία αποδίδεται κυρίως στους Πυθαγορείους. Τα πρώτα δέκα θεωρήματα αφορούν αλγεβρικές ταυτότητες των οποίων η απόδειξη γίνεται με τη βοήθεια της έννοιας του εμβαδού. Η αντιστοίχιση του γινομένου ευθυγράμμων τμημάτων με το εμβαδόν ορθογωνίου, ήταν ανασταλτικός παράγοντας για την ανάπτυξη της άλγεβρας με μεθόδους της γεωμετρίας.

Μέσα από μια τέτοια θεώρηση ήταν αδύνατον να αναπτυχθεί η έννοια του αρνητικού αριθμού.

SUMMARY

This article presents part of a work in order to define by means of geometry the product of line segments and the proof of the sign rule. The second book of Euclid contains data and application of geometry to algebra which is mainly attributed to the Pythagoreans. The first ten theorems involve algebraic identities whose proof made by means of the concept of the area. The mapping of the product line segments with the rectangle area was deterrent to the development of algebra to geometry methods. Through such an approach it would be impossible to develop the concept of negative numbers.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Το έργο του Ευκλείδη είναι γνωστό με την ονομασία «Στοιχεία». Όπως αναφέρει ο Ευάγγελος Σ. Σταμάτης στην εισαγωγή τού έργου «Ευκλείδου Γεωμετρία», τα Στοιχεία περιέχονται σε 13 βιβλία και από απόψεως περιεχομένου χωρίζονται σε τέσσερα κύρια μέρη.

Τα βιβλία $7^{ον}$, $8^{ον}$ και $9^{ον}$ είναι αφιερωμένα στην θεωρία αριθμών. (Ε. Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ (1953), σελ. 15). Από την μελέτη αυτών των βιβλίων διαπιστώνουμε ότι το γεωμετρικό σχήμα, ιδιαίτερα το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος, είναι το κύριο αναπαραστατικό εργαλείο της έννοιας του αριθμού. (Ε. Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ (1953), σελ. 132 - 267).

Μπορούμε λοιπόν να ισχυριστούμε ότι οι αρχαίοι Έλληνες χρησιμοποίησαν αυτό που σήμερα ονομάζουμε εννοιολογική μεταφορά. Αφετηρία της σύγχρονης, γνωσιακής θεωρίας της μεταφοράς, αποτέλεσε η άποψη των Lakoff και Johnson (1980) ότι η εννοιολογική μεταφορά είναι μια βασική νοητική λειτουργία διαμέσου της οποίας κατανοούμε τον κόσμο, συλλαμβάνουμε αφηρημένες έννοιες, προσφέρουμε στη σκέψη μας τη δυνατότητα να λειτουργήσει σε αφηρημένο επίπεδο αφού το βασικό αντιληπτικό μας σύστημα είναι «θεμελιώδες μεταφορικό εκ φύσεως». (Κουλέτση, σελ.1)

Οι Lakoff και Núñez (2000, σελ, 4-5-6) αναφέρουν ότι τα τελευταία χρόνια, υπήρξαν επαναστατικές εξελίξεις στη γνωστική επιστήμη παρέχοντας μας εργαλεία τα οποία μας βοηθούν να καταλάβουμε πώς γίνεται η κατανόηση των Μαθηματικών. Σύμφωνα με τους Lakoff και Núñez μια από τις βαθύτερες νέες ιδέες είναι η έννοια της μεταφορικής σκέψης. (Lakoff και Núñez 2000, σελ 5).

Πιστεύουμε ότι αρχαίοι Έλληνες Μαθηματικοί εργαζόντουσαν με εννοιολογικές μεταφορές χωρίς να έχουν συνείδηση του όρου. Το έργο του Ευκλείδη είναι γνωστό με την ονομασία «Στοιχεία». Όπως αναφέρει ο Ευάγγελος Σ. Σταμάτης στην εισαγωγή τού έργου του «Ευκλείδου Γεωμετρία», τα Στοιχεία περιέχονται σε 13 βιβλία και από απόψεως περιεχομένου χωρίζονται σε τέσσερα κύρια μέρη. Ειδικότερα το δεύτερο βιβλίο περιέχει δύο ορισμούς και 14 θεωρήματα και προβλήματα, τα οποία αποτελούν εφαρμογές του Πυθαγορείου θεωρήματος. Το βιβλίο αυτό περιέχει και εφαρμογή της γεωμετρίας στην άλγεβρα και αποδίδεται, πάντα σύμφωνα με τον Σταμάτη, στους Πυθαγορείους. Τα πρώτα δέκα θεωρήματα αναφέρονται σε αυτό που με την σύγχρονη ορολογία ονομάζουμε ταυτότητες. Αν με τα γράμματα α, β, γ, … θεωρήσουμε ευθύγραμμα τμήματα ευθειών γραμμών τότε με σύγχρονη ορολογία αποδεικνύονται οι παρακάτω ισότητες:

1. $\alpha(\beta + \gamma + \delta) = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta$
2. εάν $\beta + \gamma = \alpha$, τότε $\alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha^2$
3. $(\alpha + \beta)\alpha = \alpha^2 + \alpha\beta$

4. $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$

5. $\alpha\beta + \left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \beta\right)^2 = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$

6. $(2\alpha + \beta)\beta + \alpha^2 = (\alpha + \beta)^2$

7. $(\alpha + \beta)^2 + \alpha^2 = 2(\alpha + \beta)\alpha + \beta^2$

8. $4(\alpha + \beta)\alpha + \beta^2 = [(\alpha + \beta) + \alpha]^2$

9. $\alpha^2 + \beta^2 = 2\left[\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \beta\right)^2\right]$

10. $(2\alpha + \beta)^2 + \beta^2 = 2[\alpha^2 + (\alpha + \beta)^2]$

Ως ενδέκατη πρόταση αναφέρεται το πρόβλημα της χρυσής τομής και σύμφωνα με νεότερους κριτικούς η αλγεβρική σημασία του προβλήματος αυτού είναι η προσπάθεια λύσης της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\chi^2 = \alpha(\alpha - \chi)$ ή $\chi^2 + \alpha\chi = \alpha^2$.

Αξίζει να αναφέρω ότι στο έκτο βιβλίο γίνεται η μελέτη των ομοίων γεωμετρικών σχημάτων με τη βοήθεια της θεωρίας των αναλογιών. Στο 27$^{\text{ο}}$ θεώρημα του βιβλίου περιέχεται το πρώτο θεώρημα περί μεγίστου, που απαντάται στην ιστορία των Μαθηματικών. Με σύγχρονη αλγεβρική διατύπωση, η μέγιστη τιμή της παράστασης $\chi(\alpha - \chi)$ λαμβάνεται, όταν $\chi = \frac{\alpha}{2}$. Το βιβλίο αυτό περιέχει 5 ορισμούς και 33 θεωρήματα.

Ενδιαφέροντα στοιχεία για τον τρόπο σκέψης του Ευκλείδη, των σύγχρονων αλλά και των προγενέστερων από αυτόν Μαθηματικών, μπορούμε να δούμε στις αποδείξεις των παραπάνω προτάσεων που δίνονται στα Στοιχεία. Η πρώτη πρόταση αποδεικνύει αυτό που με την σύγχρονη ορολογία ονομάζουμε επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση. Η εφαρμογή της ιδιότητας αυτής μπορεί εύκολα να οδηγήσει στην αλγεβρική απόδειξη αρκετών προτάσεων από τις 10 προαναφερθείσες προτάσεις. Εν τούτοις οι αποδείξεις των προτάσεων αυτών γίνονται στην ουσία χωρίς χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας.

Ας δούμε όμως μερικές από τις αποδείξεις για να κάνουμε και άλλες ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις.

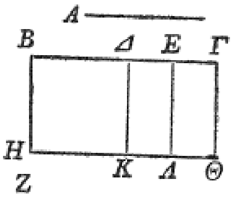
Η διατύπωση της ισότητας $α(β + γ + δ) = αβ + αγ + αδ$ στα Στοιχεία.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὁσαδηποτοῦν τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.

Μετάφραση

Ἐὰν ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ μία ἐξ αὐτῶν εἰς ὁσαδήποτε τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὰ ὀρθογώνια τὰ ὁποῖα περιέχονται ὑπὸ τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων.

Το σχήμα που χρησιμοποιείται στην απόδειξη και η απόδειξη όπως δίνεται από την μετάφραση του Σταμάτη.



Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ Α, ΒΓ, καὶ ἂς τμηθῇ ἡ ΒΓ, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὰ σημεῖα Δ, Ε· λέγω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν Α, ΒΔ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΔΕ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΕΓ.

Διότι, ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΒΖ (I.11) καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΒΗ ἴση πρὸς τὴν Α, καὶ διὰ μὲν τοῦ Η ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ ἡ ΗΘ (I.31), διὰ δὲ τῶν Δ, Ε, Γ ἂς ἀχθοῦν παράλληλοι πρὸς τὴν ΒΗ, αἱ ΔΚ, ΕΛ, ΓΘ.

Τὸ ὀρθογώνιον ΒΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ ΒΚ, ΔΛ, ΕΘ. Καὶ τὸ μὲν ΒΘ σχηματίζεται ὑπὸ τῶν εὐθειῶν Α, ΒΓ· διότι τοῦτο περιέχεται μὲν ὑπὸ τῶν ΗΒ, ΒΓ, ἡ δὲ ΒΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Α· τὸ δὲ ΒΚ σχηματίζεται ὑπὸ τῶν εὐθειῶν Α, ΒΔ· διότι τοῦτο περιέχεται μὲν ὑπὸ τῶν ΗΒ, ΒΔ, ἡ δὲ ΒΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Α. Τὸ δὲ ΔΛ σχηματίζεται ὑπὸ τῶν εὐθειῶν Α, ΔΕ· διότι ἡ ΔΚ, τουτέστιν ἡ ΒΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Α (I.34). Καὶ καθ' ὅμοιον τρόπον τὸ ΕΘ τὸ σχηματιζόμενον ὑπὸ τῶν Α, ΕΓ· ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ ὀρθογώνιον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΔ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΔΕ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ.

Ἐὰν ἄρα ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ μία ἐξ αὐτῶν εἰς ὁσαδήποτε τμήματα, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὰ ὀρθογώνια τὰ ὁποῖα περιέχονται ὑπὸ τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Η διατύπωση της ισότητας εάν $β + γ = α$, τότε $αβ + αγ = α^2$ στα Στοιχεία.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ.

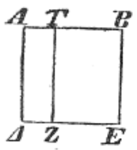
Μετάφραση

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ὅλης εὐθείας καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν εὐθεῖαν.

Το σχήμα που χρησιμοποιείται στην απόδειξη και η απόδειξη όπως δίνεται από την μετάφραση του Σταμάτη.

Διότι, ἂς τμηθῆ ἡ εὐθεῖα ΑΒ κατὰ τὸ τυχὸν σημεῖον Γ· λέγω ὅτι τὸ ὀρ- ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΑ, ΑΓ περιεχομένου ὀρθογωνίου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Γ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΕ παράλληλος ἡ ΓΖ.



Ἴσον δὴ ἐστι τὸ ΑΕ τοῖς ΑΖ, ΓΕ. καὶ ἐστι τὸ μὲν ΑΕ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον, τὸ δὲ ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον· περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ· τὸ δὲ ΓΕ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἴση γὰρ ἡ ΒΕ τῇ ΑΒ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάιων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Με τον ίδιο τρόπο γίνονται σχεδόν όλες οι αποδείξεις των δέκα προαναφερθεισών ισοτήτων.

Στην πρόταση μας παρακάτω παρουσιάζουμε μια εννοιολογική μεταφορά του αριθμού, ως μέτρο του μήκους ευθύγραμμου τμήματος, για να μπορέσουμε να χειριστούμε εργαλεία της γεωμετρίας και να αποδείξουμε αφηρημένες έννοιες που αναφέρονται στις ιδιότητες των πράξεων μεταξύ των αριθμών και να λύσουμε αριθμητικά προβλήματα και εξισώσεις.

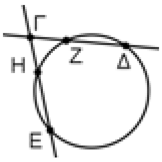
Η ΠΡΟΤΑΣΗ ΜΑΣ

Η μελέτη των Στοιχείων φανερώνει τη μεγάλη σημασία που δόθηκε σ' αυτό που ονομάζουμε γεωμετρική κατασκευή. Η μεγάλη σημασία της κατασκευής φαίνεται αμέσως στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων, από το $1^{ο}$ και $2^{ο}$ Θεώρημα που αποδεικνύονται και είναι

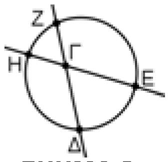
- η κατασκευή ισοπλεύρου τριγώνου με δεδομένη πλευρά.

- η κατασκευή ευθυγράμμου τμήματος ίσο με δοθέν με δεδομένο άκρο

Η γεωμετρική κατασκευή σύμφωνα με τις αντιλήψεις της γεωμετρίας πρέπει να γίνεται με τη χρήση αβαθμολόγητου χάρακα, με τη χρήση διαβήτη και να ολοκληρώνεται σε πεπερασμένα βήματα.



ΣΧΗΜΑ 1



ΣΧΗΜΑ 2

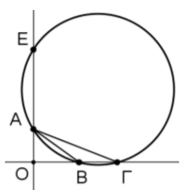
Επειδή θέλουμε ο ορισμός του γινομένου ευθυγράμμων τμημάτων να είναι γεωμετρικός, το γινόμενο που θα ορίσουμε, πρέπει να κατασκευάζεται σύμφωνα με τους παραπάνω κανόνες.

Η έννοια της δύναμης σημείου ως προς κύκλο, είναι ένα θεώρημα που ουσιαστικά μεταφέρει ένα γινόμενο δύο ευθυγράμμων τμημάτων μιας ευθείας, σε ένα γινόμενο δύο άλλων ευθυγράμμων τμημάτων μιας άλλης ευθείας, με τέτοιο τρόπο ώστε, ανά ζεύγη τα τέσσερα αυτά ευθύγραμμα τμήματα να έχουν ένα κοινό άκρο, το οποίο είναι κοινό άκρο και στα τέσσερα αυτά ευθύγραμμα τμήματα. Στα ΣΧΗΜΑ 1 και 2 ισχύει ότι ΓΖ · ΓΔ = ΓΗ · ΓΕ.

Την εφαρμογή αυτού του θεωρήματος θα χρησιμοποιήσουμε για να ορίσουμε το γινόμενο ευθυγράμμων τμημάτων ως ευθύγραμμο τμήμα.

Ορισμός Πολλαπλασιασμού ευθυγράμμων τμημάτων

Έστω Ο το σημείο τομής δύο κάθετων ευθειών χ΄χ και ψ΄ψ. Πάνω στην ψ΄ψ παίρνω το ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ το οποίο θεωρώ ως μονάδα μέτρησης. Πάνω στην ημιευθεία Οχ παίρνω τα σημεία Β και Γ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ τέμνει την ψ΄ψ στο σημείο Ε. Ορίζω ως γινόμενο των ευθυγράμμων τμημάτων ΟΒ, ΟΓ το ευθύγραμμο τμήμα ΟΕ. Συμβολικά έχω ΟΒ · ΟΓ = ΟΕ. (ΣΧΗΜΑ 3)

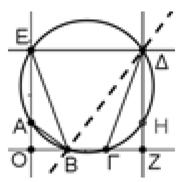


ΣΧΗΜΑ 3

Ονομάζουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ, κύκλο του γινομένου των ευθυγράμμων τμημάτων ΟΒ και ΟΓ. Ονομάζω το σημείο Ε σημείο του γινομένου των ΟΒ και ΟΓ. Ονομάζουμε τα ΟΒ, ΟΓ παράγοντες του γινομένου ΟΕ.

Σημείο αθροίσματος - γινομένου

Το αντιδιαμετρικό σημείο του Α στον κύκλο γινομένου των ευθυγράμμων τμημάτων ΟΒ και ΟΓ ονομάζεται σημείο αθροίσματος – γινομένου. Βρίσκεται πάνω σε δύο τεμνόμενες ευθείες, η μια κάθετη στον ψ΄ψ στο σημείο του γινομένου Ε και η άλλη κάθετη στον χ΄χ στο σημείο Ζ, το οποίο είναι το ίχνος του Δ στον χ΄χ και μπορεί να ονομασθεί σημείο αθροίσματος των ΟΒ, ΟΓ.



ΣΧΗΜΑ 4

Αποδεικνύεται ότι για το ίχνος του σημείου αθροίσματος-γινομένου ισχύει ΟΖ = ΟΒ + ΟΓ.

Απόδειξη (ΣΧΗΜΑ 4)

Έστω Δ το αντιδιαμετρικό σημείο του Α. Η γωνία ΟΕΔ είναι ορθή άρα ΕΔ // χ΄χ. Το τετράπλευρο ΒΓΔΕ είναι εγγράψιμο τραπέζιο οπότε ΒΕ = ΓΔ. Φέρνω από το Δ κάθετη στον χ΄χ και ονομάζω Ζ το ίχνος της. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΟΒ και ΓΔΖ είναι ίσα γιατί έχουν ΔΖ = ΕΟ και ΒΕ = ΓΖ. Επομένως ΟΒ = ΓΖ => ΟΓ + ΟΒ = ΟΓ + ΓΖ => ΟΓ + ΟΒ = ΟΖ.

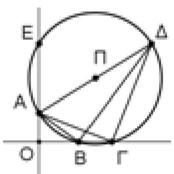
Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα στον κύκλο γινομένου των ΟΒ και ΟΓ βρίσκονται τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε και Η. Αν δίνονται τρία από αυτά τότε ο κύκλος ορίζεται μονοσήμαντα και μας προσδιορίζει τα υπόλοιπα σημεία.

Παρατηρήσεις

- Η ΔΖ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Η που είναι συμμετρικό του Α ως προς την μεσοκάθετη των βάσεων του ισοσκελούς τραπεζίου.
- Η ευθεία ΕΔ είναι πάντα παράλληλη στο χ΄χ γιατί η γωνία ΔΕΑ είναι πάντα ορθή.

Με τη βοήθεια του ορισμού και με μεθόδους γεωμετρικές μπορούμε να αποδείξουμε τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού. Επειδή ο χώρος για το άρθρο είναι περιορισμένος θα επικεντρωθούμε σε ένα μικρό μέρος της εργασίας. Αναφέρουμε μόνο μερικές από τις προτάσεις που έχουμε αποδείξει χωρίς να δώσουμε τις αποδείξεις σε όλες. Σε κάποιες παραθέτουμε το σχήμα που χρησιμοποιήσαμε για να βοηθήσουμε τον αναγνώστη να αντιληφθεί καλύτερα την πρόταση. Σε κάποιες θα παραθέσουμε πλήρη την απόδειξη για να γίνει φανερή η αποδεικτική διαδικασία που ακολουθήσαμε. Γενικά η εργασία αυτή αποτελεί συνέχεια προγενεστέρων εργασιών όπου αποδείξαμε με γεωμετρικές μεθόδους τις ιδιότητες των τετραγωνικών ριζών. Σχετικές δημοσιεύσεις υπάρχουν στα Αυγερινός, Ε & Σωτηράκης, Α (2009) και Avgerinos, E & Sotirakis, A (2008)

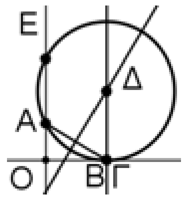
Ύπαρξη και μοναδικότητα του γινομένου



ΣΧΗΜΑ 5

Ένας κύκλος ορίζεται με μοναδικό τρόπο από τρία σημεία. Άρα το σημείο Ε είναι μοναδικό. (ΣΧΗΜΑ 5) Αν φέρω τις κάθετες στα σημεία Β, Γ πάνω στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, αυτές θα τέμνονται πάνω στον κύκλο γινομένου, έστω στο σημείο Δ, γιατί από το σημείο Α του κύκλου διέρχεται μια μοναδική διάμετρος του. Αν Π το κέντρο του κύκλου γινομένου τότε η ακτίνα ΑΠ είναι μεγαλύτερη ή ίση με την απόσταση του Π από τον άξονα ψ΄ψ. Άρα ο κύκλος γινομένου με τον άξονα ψ΄ψ θα έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο. Αυτό σημαίνει ότι το γινόμενο των ευθυγράμμων τμημάτων ΟΒ και ΟΓ ορίζεται πάντοτε.

Τετράγωνο ευθυγράμμου τμήματος



ΣΧΗΜΑ 6

Όταν τα ευθύγραμμα τμήματα ΟΒ και ΟΓ, πάνω στην ημιευθεία Οχ, είναι ίσα, τότε το γινόμενο τους συμβολίζεται με $ΟΒ^2$ (ή $ΟΓ^2$) και ονομάζεται τετράγωνο του ΟΒ (ή του ΟΓ). Στην περίπτωση αυτή το κέντρο του κύκλου γινομένου θα βρίσκεται πάνω στην μεσοκάθετη τού ΑΒ και στην κάθετη στον άξονα χ΄χ στο σημείο Β. Το γινόμενο ΟΕ είναι ίσο με το τετράγωνο του ΟΒ, δηλαδή $ΟΒ^2$ = ΟΕ. (ΣΧΗΜΑ 6)

Ορισμός Πρόσημο γινομένου

Όταν το σημείο Ε του γινομένου των ΟΒ και ΟΓ βρίσκεται στην ίδια ημιευθεία με τη μονάδα μέτρησης του ψ΄ψ, τότε το γινόμενο ονομάζεται θετικό. Προφανώς το ευθύγραμμο τμήμα ΟΕ βρίσκεται στην ημιευθεία Οψ.

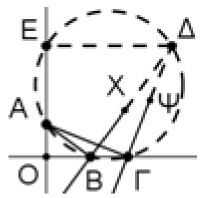
Αν το Ε βρίσκεται στην αντικείμενη ημιευθεία της μονάδας μέτρησης του ψ΄ψ, τότε το γινόμενο ονομάζεται αρνητικό. Στην περίπτωση αυτή το ευθύγραμμο τμήμα ΟΕ βρίσκεται στην ημιευθεία Οψ΄.

Έστω δύο ευθύγραμμα τμήματα ΟΖ και ΟΕ, που δημιουργούνται το καθένα από πολλαπλασιασμό δύο ευθυγράμμων τμημάτων, όπως τον ορίσαμε παραπάνω. Αν τα ΟΖ και ΟΕ βρίσκονται και τα δύο στην ημιευθεία Οψ ή και τα δύο στην ημιευθεία Οψ΄, θα λέγονται ομόσημα.

Έστω δύο ευθύγραμμα τμήματα ΟΖ και ΟΕ, που δημιουργούνται το καθένα από πολλαπλασιασμό δύο ευθυγράμμων τμημάτων, όπως τον ορίσαμε παραπάνω. Αν το ΟΖ βρίσκεται στην ημιευθεία Οψ και το ΟΕ στην ημιευθεία Οψ΄ ή το ΟΖ βρίσκεται στην ημιευθεία Οψ΄ και το ΟΕ στην ημιευθεία Οψ, θα λέγονται ετερόσημα.

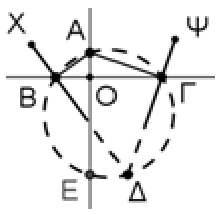
Αν δύο ευθύγραμμα τμήματα ΟΖ και ΟΕ ενός άξονα χ΄χ με αρχή το Ο, είναι ετερόσημα και ίσα, τότε θα λέγονται αντίθετα.
Θα αποδείξουμε τώρα τον κανόνα προσήμου.

Κανόνας προσήμου
Όταν τα ευθύγραμμα τμήματα ΟΒ και ΟΓ βρίσκονται στην ίδια ημιευθεία του άξονα χ΄χ, ως προς την αρχή Ο, τότε το γινόμενό τους είναι θετικό. Όταν βρίσκονται στις αντικείμενες ημιευθείες Οχ, Οχ΄ ως προς την αρχή Ο, τότε το γινόμενό τους είναι αρνητικό.



ΣΧΗΜΑ 7

Απόδειξη (ΣΧΗΜΑ 7 και ΣΧΗΜΑ 8)
Έστω ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΟΒ και ΟΓ βρίσκονται στην ημιευθεία Οχ. Το σημείο Ε του γινομένου και το σημείο Δ αθροίσματος – γινομένου βρίσκονται στην ίδια παράλληλη προς τον χ΄χ. Επομένως η θέση του Ε καθορίζεται από την θέση του Δ. Φέρνω τις κάθετες πάνω στην ΑΒ στο Β και πάνω στην ΑΓ στο Γ. Πάνω στις κάθετες παίρνω αντίστοιχα τα σημεία Χ και Ψ, ώστε τα Α, Χ, Ψ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο σχετικά με τον χ΄χ. Η γωνία ΑΒΟ είναι μεγαλύτερη από την ΑΓΟ ως εξωτερική του τριγώνου ΑΒΓ. Άρα ΑΒΟ + 90^o > ΑΓΟ + 90^o δηλαδή ΟΒΧ > ΟΓΨ => ΟΒΧ + ΧΒΓ > ΟΓΨ + ΧΒΓ => 180^O > ΟΓΨ + ΧΒΓ. Επομένως οι ευθείες ΒΧ και ΓΨ τέμνονται σχετικά με τον άξονα χ΄χ στο ημιεπίπεδο που υπάρχει το ΟΑ. Άρα το σημείο Ε βρίσκεται στην ίδια ημιευθεία με το σημείο Α. Επομένως το γινόμενο είναι θετικό.



ΣΧΗΜΑ 8

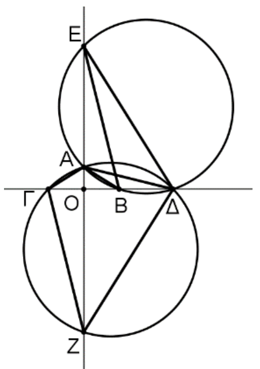
Έστω ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ βρίσκεται στην ημιευθεία Οχ΄ και το ΟΓ στην ημιευθεία Οχ. Τότε η γωνία ΟΒΧ > 90^o και η γωνία ΟΓΨ > 90^o. Άρα ΟΒΧ + ΟΓΨ > 180^o. Άρα οι ευθείες ΒΧ και ΓΨ τέμνονται σχετικά με τον άξονα χ΄χ στο ημιεπίπεδο που δεν περιέχει το σημείο Α. Άρα το Ε βρίσκεται στην αντικείμενη ημιευθεία από αυτήν που ανήκει το σημείο Α. Επομένως το γινόμενο είναι αρνητικό.

Όταν τα ΟΒ και ΟΓ βρίσκονται στην ημιευθεία Οχ΄ η απόδειξη είναι όμοια με την πρώτη περίπτωση.

Αντίθετα γινόμενα

Έστω ΟΒ και ΟΓ δύο ίσα ευθύγραμμα τμήματα του άξονα χ΄χ με αρχή το Ο, που βρίσκονται το ένα στην ημιευθεία Οχ και το άλλο στην ημιευθεία Οχ΄. Έστω ΟΔ ένα ευθύγραμμο τμήμα του άξονα χ΄χ. Τα γινόμενα ΟΔ·ΟΒ και ΟΔ·ΟΓ είναι αντίθετα.

Απόδειξη (Σχήμα 9)



ΣΧΗΜΑ 9

Έχουμε δεδομένο ότι τα ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΟΒ και ΟΓ είναι στις αντικείμενες ημιευθείες Οχ και Οχ΄ του άξονα χ΄χ. Τα ευθύγραμμο τμήμα ΟΔ ως ευθύγραμμο τμήμα του άξονα χ΄χ θα ανήκει σε μια από τις ημιευθείες Οχ ή Οχ΄. Επομένως το ΟΔ θα είναι στην ίδια ημιευθεία με ένα από τα ΟΒ, ΟΓ και σε διαφορετική ημιευθεία με το άλλο. Σύμφωνα με τον κανόνα προσήμου που αποδείξαμε προηγουμένως συμπεραίνουμε ότι το ένα από τα γινόμενα ΟΔ· ΟΒ και ΟΔ· ΟΓ είναι θετικό και το άλλο αρνητικό. Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι τα γινόμενα αυτά είναι ίσα ευθύγραμμα τμήματα. Υποθέτουμε ότι το ΟΔ είναι στην ίδια ημιευθείαμε το ΟΒ. Έστω ΟΑ η μονάδα μέτρησης στον άξονα ψ΄ψ και ΟΕ το γινόμενο ΟΔ ·ΟΒ και ΟΖ το γινόμενο ΟΔ ·ΟΓ. Οι γωνίες ΑΔΒ και ΑΔΓ είναι ίσες. Τα τετράπλευρα ΑΒΔΕ και ΑΔΖΓ είναι εγγεγραμμένα. Άρα οι γωνίες ΒΕΟ και ΟΖΓ είναι ίσες. Επομένως τα τρίγωνα ΟΒΕ και ΟΖΓ είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια και έχουν μια οξεία γωνία ίση και μια κάθετη πλευρά ίση. Άρα

ΟΕ = ΟΖ. Άρα τα γινόμενα ΟΕ και ΟΖ είναι αντίθετα. Όμοια αν το ΟΔ είναι στηνίδια ημιευθεία με το ΟΓ.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Οι αφηρημένες αλγεβρικές έννοιες πολλές φορές δημιουργούν στους μαθητές επιστημολογικά εμπόδια. Οι εννοιολογικές μεταφορές μας επιτρέπουν να μετατρέψουμε την αφηρημένη αλγεβρική σχέση σε γεωμετρική. Στο επίπεδο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης η γεωμετρία είναι αξιωματικά τεκμηριωμένη και παρέχει στον εκπαιδευτικό ένα πλαίσιο όπου μπορεί να δημιουργήσει παραδείγματα τα οποία έχουν την απαραίτητη πειθαρχία που απαιτούν τα Μαθηματικά. Πιστεύουμε ότι οι εκπαιδευτικοί, με την βοήθεια των εννοιολογικών μεταφορών, μπορούν αμφίδρομα, στο γνωστικό δίπολο Γεωμετρία – Άλγεβρα, να μεταβαίνουν από το ένα άκρο στο άλλο με στόχο την δημιουργία κατάλληλων συνθηκών για την κατανόηση των εννοιών, ανάλογα με τις ανάγκες του κάθε μαθητή.

Στον Κανόνα προσήμου που παρουσιάσαμε παραπάνω οι αφηρημένες έννοιες του + (συν) και του – (πλην), οπτικοποιούνται ως ευθύγραμμα τμήματα ημιευθειών και το αποτέλεσμα του γινομένου τους με διάφορους τρόπους δηλαδή ως (+) (+), (–) (–), (–) (+) ή (+) (–) οπτικοποιείται ως ευθύγραμμο τμήμα σε μια ημιευθεία.

Στα αντίθετα γινόμενα που αποδείξαμε παραπάνω η αφηρημένη σχέση $\delta\cdot(-\beta) = -(\delta\cdot\beta)$ οπτικοποιείται ως ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων σε αντικείμενες ημιευθείες.

Οι τεκμηριωμένες εννοιολογικές μεταφορές, εκτός από το σημαντικό γεφύρωμα ανάμεσα στον κλάδο της γεωμετρίας και της άλγεβρας, μας παρέχουν την απαραίτητη ασφάλεια και την αποφυγή αυθαιρεσιών στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται με Μαθηματικά λογισμικά.

Βιβλιογραφία

1. Ε. Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ (1952), Ευκλείδου Γεωμετρία Στοιχείων – Βιβλία 1, 2, 3, 4. Εκδοτικός Οίκος: ΝΙΚ. Α. ΣΑΚΚΟΥΛΑ

2. Ε. Σ. Σταμάτη (1953), Ευκλείδου Γεωμετρία Θεωρία Αριθμών – Βιβλία 5, 6, 7, 8, 9 . Οργανισμός Εκδόσεων Σχολικών Βιβλίων

3. Αυγερινός, Ε & Σωτηράκης, Α (2009), «Μια προσέγγιση της χρήσης ισόμορφων καταστάσεων στη Μαθηματική διδασκαλία; Πρωτότυπες αποδείξεις των ιδιοτήτων των τετραγωνικών ριζών με τη βοήθεια της γεωμετρίας», Πρακτικά 11ου Παγκύπριου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας και Επιστήμης, σελ. 469-483, Λευκωσία, Φεβρουάριος 2009

4. Avgerinos, E & Sotirakis, A (2008), “How easy or difficult is it to distinguish isomorphism’s? From the simplicity of Polya’s analogy to the complicity of Greer and Harel’s isomorphism, in Research in Mathematical Education”, ed. A Gagatsis, Conference of Five Cities, compl. Vol. pp. 27-35, University of Cyprus, Nicosia

5. Lakoff,G., & Núñez, R. (2000). Where Mathematics Comes from? How the embodied mind brings mathematics into being, Basic Books.

6. Κουλέτση, Ε., Οι Εννοιολογικές Μεταφορές και η Χρήση τους από τους Καθηγητές στη διδασκαλία των Μαθηματικών, Διπλωματική Εργασία