

**Η εισαγωγή «νέων» εννοιών στα Μαθηματικά του Δημοτικού. Μια υποχρέωση για επικαιροποίηση και ενημέρωση σύμφωνα με τις προκλήσεις του παρόντος και του μέλλοντος:
Από τα κλάσματα στον ρυθμό μεταβολής.**

Δήμητρα Ρεμούνδου,
remoundou@aegean.gr,
Εργαστήριο Μαθηματικών, Διδακτικής και Πολυμέσων
Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Ευγένιος Αυγερινός
Εργαστήριο Μαθηματικών, Διδακτικής και Πολυμέσων,
ΠΤΔΕ, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Δημοκρατίας 1, 85100, Ρόδος
eavger@aegean.gr

Περίληψη

Η έννοια του ρυθμού μεταβολής θεωρείται ιδιαίτερης σημασίας στα μαθηματικά, καθώς συνδέεται με οικείες έννοιες τις καθημερινής ζωής, ενώ παράλληλα αποτελεί βάση για την κατανόηση πιο αφηρημένων εννοιών της Μαθηματικής Ανάλυσης, όπως αυτή της παραγώγου. Αρκετές είναι οι δυσκολίες που έχουν αναδειχτεί από έρευνες σε σχέση με την κατανόηση του ρυθμού μεταβολής. Στην παρούσα εργασία γίνεται μια προσπάθεια να καθοριστούν οι διάφορες πτυχές της έννοιας και να αποδομηθεί σε πρωταρχικές έννοιες που διδάσκονται στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση και επηρεάζουν την αντίληψή της.

Λέξεις κλειδιά: Ρυθμός μεταβολής, αναπαραστάσεις, αναλογίες, γραφική παράσταση

Εισαγωγή

Ο ρυθμός μεταβολής χρησιμοποιείται ευρέως στις φυσικές επιστήμες, αλλά και στα οικονομικά. Κάποιοι γνωστοί ρυθμοί μεταβολής είναι η ταχύτητα, η επιτάχυνση, ο ρυθμός μεταφοράς δεδομένων τηλεπικοινωνιακής σύνδεσης, ο ρυθμός μεταβολής ορμής, κινητικής

ενέργειας, δυναμικής ενέργειας και φορτίου πυκνωτή. Παρόλο το ευρύ φάσμα εφαρμογών του ρυθμού μεταβολής δεν είναι αυτονόητο ότι είναι αναγνωρίσιμος από τους μαθητές, ακόμα κι όταν μπορούν να υπολογίσουν κάποιο από αυτά τα μεγέθη.

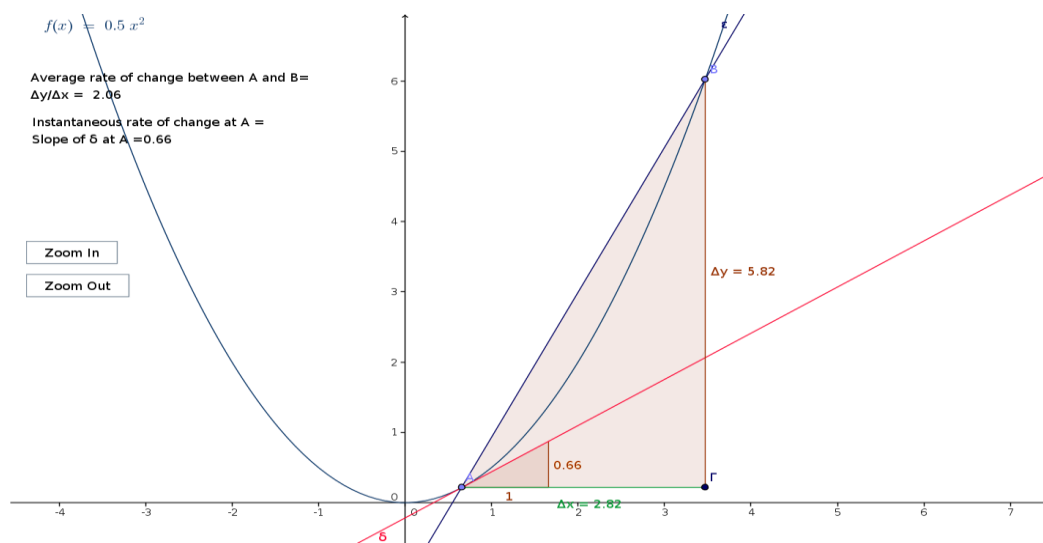
Για να γίνει αντιληπτή η έννοια του ρυθμού μεταβολής και των αναπαραστάσεών του, απαιτείται η πρότερη κατανόηση κάποιων μαθηματικών εννοιών. Αρκετές από αυτές διδάσκονται στο δημοτικό, όπως το κλάσμα, ο λόγος και οι αναλογίες, ή γίνεται μια πρώτη αναφορά στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, όπως η μεταβλητή και οι γραφικές παραστάσεις. Το ερώτημα που τίθεται είναι αν υπάρχει ανάγκη εισαγωγής νέων εννοιών ή εμπλουτισμού υφιστάμενων στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, έτσι ώστε να διευκολύνεται η αντίληψη του ρυθμού μεταβολής, και κατά πόσο αυτή είναι εφικτή.

Ρυθμός μεταβολής

Η κεντρική ιδέα πίσω από την έννοια του ρυθμού μεταβολής είναι το πόσο γρήγορα αλλάζει η τιμή μιας συνάρτησης σε σχέση με το αρχικό της όρισμα. Η μέτρηση του ρυθμού μεταβολής εμπλέκει την πολλαπλασιαστική σύγκριση των μεταβολών δύο ή περισσότερων ποσοτήτων (Thompson, 1994).

Ο ρυθμός μεταβολής αποτελεί μια γενικευμένη έννοια που περιλαμβάνει τόσο τον μέσο ρυθμό μεταβολής όσο και τον στιγμιαίο. Ο μέσος ρυθμός μεταβολής αναφέρεται σε ένα διάστημα τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής και συνδέεται με τον λόγο, ενώ ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής αφορά σε απειροελάχιστες μεταβολές της ανεξάρτητης μεταβλητής και εκφράζεται από την παράγωγο σε σημείο (Σχήμα 1).

Σχήμα 1. Γραφική παράσταση



Ο ρυθμός μεταβολής μπορεί να είναι σταθερός, με τιμή θετική, αρνητική ή μηδενική, ή να

μεταβάλλεται. Ο σταθερός ρυθμός μεταβολής είναι πιο εύκολα κατανοητός από τους μαθητές οι οποίοι φαίνεται να αντιλαμβάνονται καλύτερα την κλίση από την παράγωγο (Tyne, 2014). Στην περίπτωση σταθερού ρυθμού μεταβολής ο στιγμιαίος ρυθμός ισούται με τον μέσο και μπορούν να χρησιμοποιηθούν διαφορετικοί τύποι για τον υπολογισμό του.

Ο ρυθμός μεταβολής διδάσκεται στα μαθηματικά της Γ' λυκείου σε συνδυασμό με την παράγωγο και ενώ έχουν διδαχτεί οι συναρτήσεις. Χρησιμοποιείται όμως σε μαθήματα φυσικών επιστημών πριν οριστεί στα μαθηματικά. Έτσι σε πολλές περιπτώσεις εφαρμόζονται πρακτικά τύποι για την εύρεση ταχύτητας ή επιτάχυνσης, χωρίς να έχει γίνει αντιληπτή η σύνδεση με την έννοια. Επιπλέον, η σύνδεση αυτή δεν γίνεται εμφανής ούτε όταν διδάσκεται στα μαθηματικά, καθώς η διδασκαλία του είναι συνήθως αποκομμένη από πρακτικές εφαρμογές.

Η έννοια του μέσου ρυθμού μεταβολής πρέπει να είναι ξεκάθαρη για να γίνει κατανοητός ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής (Tyne, 2014). Για να γίνει όμως αυτό, είναι απαραίτητο να έχει προηγηθεί η κατανόηση και η δυνατότητα χειρισμού κλασμάτων, λόγων και αναλογιών. Επιπλέον, οι έννοιες της ποσότητας και της μεταβολής είναι καθοριστικές για την κατανόηση των συναρτήσεων και κατ' επέκταση του ρυθμού μεταβολής.

Αναπαραστάσεις

Οι αναπαραστάσεις, οι οποίες μπορεί να είναι λεκτικές, συμβολικές, αριθμητικές (πίνακας τιμών) ή γραφικές, διαδραματίζουν ιδιαίτερο ρόλο στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών. Ο συνδυασμός αναπαραστάσεων και η ικανότητα μετάβασης από μία αναπαράσταση σε μία άλλη θεωρείται κομβικής σημασίας για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών και την επίλυση προβλημάτων (Gagatsis & Shiakalli, 2004). Οι αναπαραστάσεις επιδρούν σημαντικά στον τρόπο που σκέφτονται οι μαθητές για την επίλυση προβλημάτων, ενώ παρατηρούνται παρανοήσεις οι οποίες επηρεάζονται από τον τρόπο αναπαράστασης (De Bock, Van Dooren, Verschaffel, 2015).

Στα μαθηματικά και στις φυσικές επιστήμες η έννοια του ρυθμού μεταβολής εκφράζεται με διαφορετικές αναπαραστάσεις. Όπως και οι συναρτήσεις, ο ρυθμός μεταβολής μπορεί να αναπαρασταθεί γραφικά, συμβολικά και αριθμητικά (Herbert & Pierce, 2011). Η κατανόηση της έννοιας του ρυθμού μεταβολής φαίνεται ότι εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την αναπαράσταση και το πλαίσιο στο οποίο αναφέρεται και δεν είναι αυτονόητο ότι η αντίληψή του υπό μία αναπαράσταση μεταφέρεται και σε άλλες (Herbert et al., 2011).

Για την κατανόηση του ρυθμού μεταβολής απαιτείται η καλή αντίληψη της μεταβολής των ποσών από τη γραφική αναπαράσταση. Η κατανόηση-αντίληψη των γραφικών παραστάσεων (graph comprehension) ορίζεται από τους Friel, Curcio & Bright (2001) ως το σύνολο των ικανοτήτων των

αναγνωστών των γραφικών παραστάσεων να λαμβάνουν μηνύματα από παραστάσεις, κατασκευασμένες από τους ίδιους ή από άλλους.

Βασικές έννοιες

Οι έννοιες του κλάσματος, του λόγου και της αναλογίας είναι βασικές στα μαθηματικά και διδάσκονται από την πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Η κατάκτηση των εννοιών αυτών θεωρείται απαραίτητη για να κατανοήσει ο μαθητής πιο περίπλοκες έννοιες των μαθηματικών. Οι έννοιες του λόγου και της αναλογίας μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως εφαλτήριο για να οδηγηθούν οι μαθητές σε μαθηματική σκέψη ανώτερου επιπέδου (Lesh, Post, Behr, 1998).

Τα κλάσματα εισάγονται στη πρωτοβάθμια εκπαίδευση από την Γ' τάξη και ως την ΣΤ' η διδασκαλία τους εστιάζει στον χειρισμό κλασμάτων. Στα περισσότερα προγράμματα σπουδών οι αναλογίες διδάσκονται στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Στο ελληνικό πρόγραμμα σπουδών διδάσκονται ποσοστά στην Ε' τάξη του δημοτικού σχολείου (Μαθηματικά Ε' Δημοτικού, κεφ. 22 και 23) και σε επόμενα κεφάλαια χρησιμοποιούνται άτυπα αναλογίες σε προβλήματα και σε μεγεθύνσεις-σμικρύνσεις.

Οι έννοιες του λόγου και της αναλογίας παρουσιάζονται πιο αναλυτικά στην ΣΤ' δημοτικού στην 3η θεματική ενότητα (Μαθηματικά ΣΤ' Δημοτικού). Σύμφωνα με τον ορισμό του ελληνικού σχολικού βιβλίου (Μαθηματικά ΣΤ' Δημοτικού, κεφ. 30), λόγος είναι το αποτέλεσμα της σύγκρισης δύο μεγεθών που εκφράζεται ως κλάσμα με αριθμητή το ένα μέγεθος και παρανομαστή το άλλο. Ο λόγος συνδέεται με τα κλάσματα σε βαθμό που είναι δύσκολο να περιγραφούν οι διαφορές τους. Η σχέση κλασμάτων και λόγων αναλύεται από τους Clark, Berenson & Cavey (2003), όπου αναφέρονται οι αντιλήψεις και αποσαφηνίζονται τα σημεία που ταυτίζονται και που διαφέρουν οι δύο έννοιες. Σύμφωνα με τα παραπάνω, η σύνδεση του λόγου με κλάσμα είναι περιοριστική της έννοιας.

Η κατανόηση του μέσου ρυθμού μεταβολής στηρίζεται στην έννοια του λόγου. Ο ρόλος του αριθμητή και του παρανομαστή σε έναν λόγο και κατ' επέκταση σε ένα ρυθμό μεταβολής δεν είναι ξεκάθαρος στους μαθητές (Herbert & Pierce, 2012). Οι Lobato & Thanheiser (2002), μετά από πειραματική διδασκαλία με τη βοήθεια λογισμικού, προτείνουν ένα πλαίσιο διδακτικής για την κατανόηση του λόγου ως μέτρηση με τις παρακάτω συνιστώσες:

- Απομόνωση των χαρακτηριστικών που πρέπει να μετρηθούν
- Καθορισμός των ποσοτήτων που επηρεάζουν τα χαρακτηριστικά και του τρόπου που γίνεται αυτό
- Κατανόηση των χαρακτηριστικών μιας μέτρησης

- Κατασκευή του λόγου

Στην ΣΤ' δημοτικού ορίζεται και η αναλογία ως ισότητα δύο λόγων. Δύο ποσά είναι ανάλογα, όταν οι τιμές του ενός προκύπτουν από τις τιμές του άλλου πολλαπλασιάζοντας κάθε φορά με έναν σταθερό αριθμό. Στα ανάλογα ποσά ο λόγος των τιμών τους διατηρείται σταθερός. Ως τρόποι επίλυσης προβλημάτων με αναλογίες αναφέρονται η αναγωγή στη μονάδα και στη συνέχεια ο σχηματισμός της αναλογίας. Η απλή μέθοδος των τριών διδάσκεται στο κεφάλαιο 38 με την επισήμανση στους δάσκαλους, ότι “δεν πρέπει με κανέναν τρόπο να αποβεί σε βάρος των άλλων δύο μεθόδων και ειδικά της μεθόδου των αναλογιών που είναι ο ακρογωνιαίος λίθος της δόμησης της μαθηματικής σκέψης, ώστε το παιδί να μάθει αργότερα να λύνει εξισώσεις” (Μαθηματικά ΣΤ' Δημοτικού, Βιβλίο Δασκάλου).

Σημαντική για την ανάπτυξη μαθηματικής σκέψης είναι και η αναγνώριση των ποσών και τότε αυτά είναι σταθερά και μεταβλητά. Στο σχολικό βιβλίο μαθηματικών της ΣΤ' δημοτικού ως ποσά ορίζονται οι έννοιες που μπορούν να μετρηθούν και επομένως να εκφραστούν με συγκεκριμένο αριθμό. Τα σταθερά ποσά έχουν πάντοτε την ίδια τιμή, ενώ τα μεταβλητά μπορούν να πάρουν διάφορες τιμές. Ως άγνωστος ή μεταβλητή ορίζεται το γράμμα ή σύμβολο που χρησιμοποιείται σε μια αριθμητική παράσταση και μπορεί να αντικατασταθεί από οποιαδήποτε τιμή που μπορεί να πάρει ένα ποσό.

Ο προβληματισμός σχετικά με την αντίληψη της έννοιας της μεταβλητής από μαθητές αυτής της ηλικίας οδήγησε να προταθεί στα πλαίσια του εξορθολογισμού της ύλης το ακαδημαϊκό έτος 2016-17 να μην δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στον όρο. Συγκεκριμένα αναφέρεται (αριθμ. 35/8-09-2016 Πράξη του Δ.Σ. του Ι.Ε.Π): «Κεφ. 25: Ο όρος «μεταβλητή» προσεγγίζεται στο Γυμνάσιο. Να μην γίνει αναφορά στον ορισμό της μεταβλητής. Δεδομένου ότι μια πρώτη προσέγγιση είναι αρκετή, αφαιρείται ό,τι περιπλέκει την έννοια.».

Μεταβολή μιας ποσότητας-μεταβλητής είναι το μέτρο της αλλαγής στην τιμή της ποσότητας-μεταβλητής. Συμμεταβολή είναι ένα μέτρο της σχέσης των μεταβολών δύο ποσοτήτων-μεταβλητών. Σε μια συνάρτηση με $y = f(x)$ θα είναι το μέτρο της σχέσης-αλλαγής ανάμεσα στην ανεξάρτητη μεταβλητή x και στην εξαρτημένη y .

Στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση, στη Β' & Γ' γυμνασίου διδάσκονται γραμμικές εξισώσεις και υπάρχουν προβλήματα με ταχύτητα, λόγους, αναλογίες και ποσοστά. Στη Β' γυμνασίου ορίζεται η γραμμική συνάρτηση $y = a \square x$ και ο αριθμός a , δηλαδή ο σταθερός λόγος $\frac{y}{x}$ αναφέρεται ως κλίση της ευθείας της συνάρτησης αυτής. Το a αναφέρεται και ως κλίση της συνάρτησης $y = a \square x + \beta$. Στην Γ' λυκείου εισάγεται ως έννοια ο ρυθμός μεταβολής ως εφαρμογή της παραγώγου

συνάρτησης. Στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης υπάρχουν περισσότερες λεπτομέρειες για τον ρυθμό μεταβολής. Φαίνεται όμως ότι οι μαθητές μαθαίνουν να επιλύουν προβλήματα με ρυθμούς μεταβολής χρησιμοποιώντας την παράγωγο, χωρίς να εστιάζουν στη σημασία του ρυθμού και στη σύνδεση με άλλες μορφές του. Η ταχύτητα, η επιτάχυνση και άλλοι ρυθμοί διδάσκονται στη Φυσική σε μικρότερες τάξεις, όπως για παράδειγμα η ταχύτητα και η στιγμιαία ταχύτητα στην ευθύγραμμη ομαλή και μεταβαλλόμενη κίνηση στη Β' γυμνασίου.

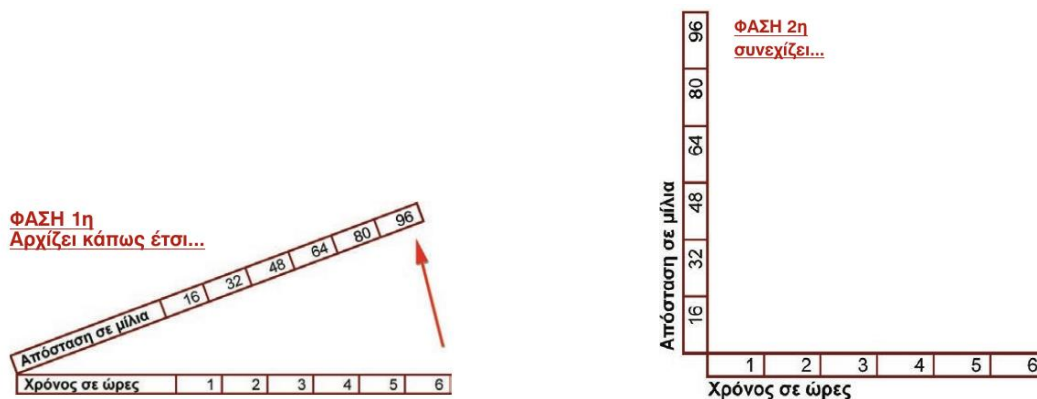
Στο δημοτικό χρησιμοποιούνται κυρίως πίνακες τιμών για την αναπαράσταση των αλλαγών σε ποσότητες (Πίνακας 1). Κατά την επίλυση προβλημάτων ανάλογων και αντιστρόφως ανάλογων ποσών γίνεται αλλαγή από αναπαράσταση με πίνακα τιμών σε συμβολική αναπαράσταση.

Πίνακας 1. Πίνακας τιμών

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	

Οι γραφικές παραστάσεις δεν χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση ποσοτήτων, στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση εκτός του κεφαλαίου της στατιστικής. Στο τετράδιο εργασιών του μαθητή της ΣΤ' δημοτικού υπάρχει μια δραστηριότητα για την κατασκευή γραφικής παράστασης των ανάλογων ποσών (Σχήμα 2).

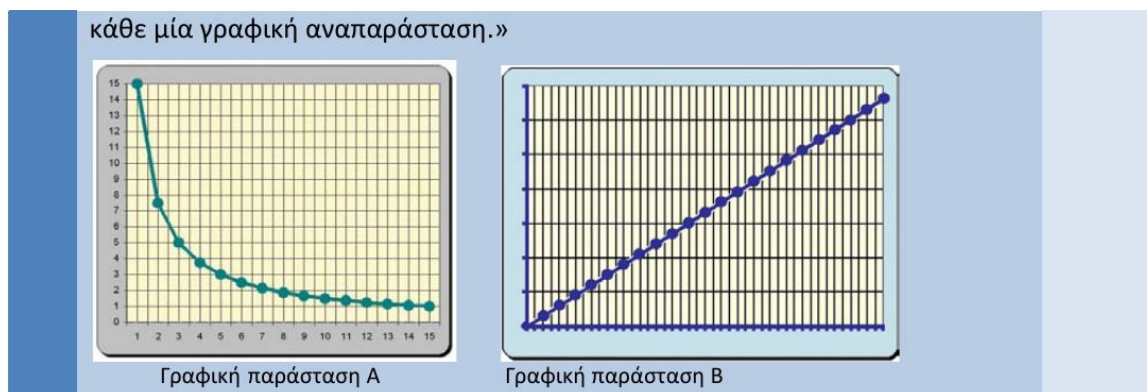
Σχήμα 2. Δραστηριότητα γραφικής παράστασης ανάλογων ποσών (Τετράδιο Εργασιών ΣΤ' δημοτικού)



Στην Κύπρο, σύμφωνα με το αναθεωρημένο αναλυτικό πρόγραμμα (Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών, 2010), στην Δ' τάξη του δημοτικού σχολείου εισάγεται η έννοια του λόγου και οι μαθητές αναγνωρίζουν ανάλογα και μη ανάλογα ποσά, ενώ επιλύουν και προβλήματα αναλογιών. Στην Ε' τάξη επανέρχονται στο θέμα των αναλογιών με περισσότερη λεπτομέρεια, αναφέρονται στις κλίμακες και επιλύουν προβλήματα ποσοστών. Στην ΣΤ' τάξη οι μαθητές διευρύνουν την έννοια της αναλογίας και ασχολούνται με προβλήματα αναλογιών και τους τρόπους επίλυσής τους. Στο

Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Κύπρου στην Κλίμακα 4 αναφέρονται οι γραφικές παραστάσεις τόσο των ανάλογων όσο και των αντιστρόφως ανάλογων ποσών (Σχήμα 3).

Σχήμα 3. Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Κύπρου



Δυσκολίες στην αντίληψη των εννοιών

Λόγω της σημασίας των κλασμάτων και των αναλογιών στη μαθηματική εκπαίδευση έχουν πραγματοποιηθεί πολλές έρευνες, στις οποίες μελετώνται τα λάθη και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν μαθητές (Karplus, Pulos, Stage, 1983) και φοιτητές (Post, Harel, Behr, Lesh, 1991; Ward & Thomas, 2007), καθώς και οι στρατηγικές που επιλέγονται για την επίλυση προβλημάτων αναλογιών (Tournaire & Pulos, 1985; Γαγάτσης & Σιαμαρή, 2003).

Πολλοί μαθητές δεν αναγνωρίζουν τα κλάσματα ως μαθηματικές οντότητες ή ως πραγματικά αντικείμενα, αλλά τα θεωρούν διαδικασίες που πρέπει να απομνημονεύσουν (Sfard, 1991). Ένα κλάσμα μπορεί να γίνει αντιληπτό ως μέρος-όλο (part-whole), ως λόγος (ratio), ως τελεστής (operator), ως πηλίκο (quotient) ή ως μέτρο (measure), με το μέρος-όλο να φαίνεται βασικό για την κατανόηση των άλλων όψεων (Charalambous & Pitta-Pandazi, 2007). Ο τρόπος που οι μαθητές αντιλαμβάνονται την έννοια του κλάσματος επηρεάζει τον τρόπο που κατανοούν άλλες έννοιες (Thompson & Saldanha, 2003). Η κατανόηση του " $\frac{\alpha}{\beta}$ " ως "α αντικείμενα από τα β αντικείμενα", μπορεί να προκαλεί δυσκολίες στην κατανόηση του καταχρηστικού κλάσματος, όπου ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος του παρανομαστή ή ενός σύνθετου κλάσματος με κλάσμα στον αριθμητή (Thompson et al., 2003).

Σε αρκετές έρευνες έχουν αναδειχτεί δυσκολίες των δασκάλων με τα κλάσματα, τα οποία θεωρούνται το πιο δύσκολο μέρος των μαθηματικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (Ward et al., 2007). Σε έρευνα σε φοιτητές στην Ελλάδα, παρατηρήθηκαν δυσκολίες, κυρίως με την έννοια του καταχρηστικού κλάσματος, τον χωρισμό σε ίσα μέρη αλλά και την επίλυση προβλημάτων με ανάλογα ποσά ή ρυθμό μεταβολής (Ρεμούνδου & Αυγερινός, 2015). Η κατανόηση των κλασμάτων

επιτυγχάνεται μέσω συμπληρωματικών σχημάτων εννοιολογικών λειτουργιών που βασίζονται σε εις βάθος κατανόηση της αναλογικότητας (Thompson et al., 2003).

Ο ρυθμός μεταβολής και ιδιαίτερα ο μέσος στηρίζεται στην κατανόηση του λόγου και προτείνεται η ανάπτυξη των δύο εννοιών σε συνδυασμό, με τη βοήθεια γραφικών αναπαραστάσεων (Orton, 1983). Ο ρόλος του αριθμητή και του παρανομαστή σε έναν λόγο και κατ' επέκταση σε έναν ρυθμό μεταβολής δεν είναι ξεκάθαρος σε πολλούς μαθητές (Herbert et al., 2012).

Δυσκολίες έχουν παρατηρηθεί και σε σχέση με τους λόγους και τον ρυθμό μεταβολής σε ενεργεία δασκάλους (Post et al., 1991). Σε προβλήματα ρυθμού της έρευνας των Post et al. (1991) μεγάλος αριθμός συμμετεχόντων δεν απάντησε ή δεν αιτιολόγησε επαρκώς την απάντησή του. Οι ερευνητές συμπεραίνουν ότι το πρόβλημα έχει δύο όψεις. Αφενός οι περισσότεροι δάσκαλοι έχουν ελλείψεις στα μαθηματικά και αφετέρου μόνο μια μικρή μειοψηφία έχει τη δυνατότητα να εξηγήσει τη λύση με ένα παιδαγωγικά αποδεκτό τρόπο.

Για πολλούς μαθητές δεν είναι ξεκάθαρη η διαφορά της έννοιας της “ποσότητας” και της “μεταβολής της ποσότητας” (Thompson, 1994). Μια άλλη βασική σύγχυση έχει διαπιστωθεί ανάμεσα στις έννοιες της μεταβολής και του ρυθμού μεταβολής (Thompson, 1994). Ακόμα, σε πολλές περιπτώσεις δεν γίνεται ο διαχωρισμός ανάμεσα στον μέσο και στον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής (Orton, 1983). Δυσκολίες με την έννοια του ρυθμού μεταβολής έχουν παρατηρηθεί και σε καθηγητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, όπου απουσιάζει η συνοχή μεταξύ των εννοιών του λόγου, του ρυθμού και της κλίσης (Coe, 2007).

Οι μαθητές φαίνεται ότι δεν συνδέουν την έννοια του ρυθμού μεταβολής με μεταβολές ποσοτήτων ή με μεταβλητές, όπως οι μαθηματικοί, αλλά κυρίως με κάποια ιδιότητα της συνάρτησης που προκύπτει από το γράφημα ή την αλγεβρική της μορφή (Weber & Dorko, 2014). Επιπλέον, επισημαίνεται ότι εστιάζουν σε κάποια αναπαράσταση του ρυθμού μεταβολής, αριθμητική, γραφική ή συμβολική και δυσκολεύονται να κατανοήσουν τη σχέση μεταξύ των αναπαραστάσεων αυτών και της έννοιας την οποία εκφράζουν, καθώς και να μεταβούν από ένα αναπαραστασιακό σύστημα σε ένα άλλο (Herbert et al., 2011). Έρευνες έχουν δείξει ότι οι μαθητές μπορούν να εξάγουν περισσότερες πληροφορίες από την αριθμητική αναπαράσταση, ενώ αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην εξαγωγή συμπερασμάτων από τη γραφική και κυρίως τη συμβολική (Herbert et al., 2011).

Στα σχολικά βιβλία χρησιμοποιούνται δύο τύποι πλαισίου για τον ρυθμό μεταβολής, αυτοί που περιλαμβάνουν διάστημα και χρόνο και αυτοί που εμπεριέχουν άλλες μεταβλητές (Herbert et al., 2012). Η ταχύτητα έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως ως παράδειγμα για τον ρυθμό μεταβολής, καθώς θεωρείται οικεία στους μαθητές (Herbert et al., 2011). Παρόλα αυτά έχει παρατηρηθεί ότι η

εξοικείωση με την έννοια της ταχύτητας δεν επεκτείνεται απαραίτητα στη μορφοποίηση άλλων ρυθμών μεταβολής (Lobato & Thanheiser, 1999; Herbert et al., 2011). Επιπλέον, επισημαίνεται ότι όταν χρησιμοποιείται ένας όρος, όπως ταχύτητα, για την περιγραφή του ρυθμού μεταβολής, δημιουργείται η εντύπωση ότι αναφέρεται σε μία οντότητα και όχι στη συμμεταβολή δύο μεγεθών (Lobato et al., 1999). Έχει παρατηρηθεί ακόμα σύγχυση μεταξύ μέσης και σταθερής ταχύτητας (Orton, 1984).

Σε παραδείγματα όπου οι μαθητές καλούνταν να ορίσουν ρυθμούς μεταβολής ποσοτήτων, φάνηκε ότι υπήρξαν δυσκολίες αναγνώρισης των χαρακτηριστικών στα οποία έπρεπε να εστιάσουν και των ποσοτήτων που επηρεάζουν αυτά τα χαρακτηριστικά (Lobato et al., 1999). Όσον αφορά στην ταχύτητα παρατηρήθηκαν εσφαλμένες αντιλήψεις, όπως ότι τα μικρότερα αντικείμενα θα πρέπει να είναι πιο γρήγορα από τα μεγαλύτερα για να καλύψουν την ίδια απόσταση ή ότι όποιος κουνάει πιο γρήγορα τα πόδια του πηγαίνει και πιο γρήγορα (Lobato et al., 1999).

Σημαντικοί παράγοντες στη διδασκαλία του ρυθμού μεταβολής

Μία κατηγοριοποίηση (Herbert et al., 2012) των χαρακτηριστικών του ρυθμού μεταβολής που θα μπορούσαν να είναι καίρια στη διδακτική του (educationally critical aspects-ECAs), αλλάζοντας την εστίαση από τη μελέτη κανόνων σε μελέτη σχέσεων, έχει ως εξής:

ECA 1: Ο ρυθμός μεταβολής ως μια σχέση μεταξύ των μεταβολών σε δύο ποσότητες.

ECA 2: Ο ρυθμός μεταβολής ως μια σχέση μεταξύ των μεταβολών σε δύο ποσότητες, ο οποίος μπορεί να μεταβάλλεται.

ECA 3: Ο ρυθμός μεταβολής ως μια αριθμητική σχέση μεταξύ των μεταβολών σε δύο ποσότητες, ο οποίος μπορεί να μεταβάλλεται.

ECA 4: Ο ρυθμός μεταβολής ως μια αριθμητική σχέση μεταξύ των μεταβολών σε δύο ποσότητες, ο οποίος μπορεί να μεταβάλλεται και είναι εφαρμόσιμος σε οποιοδήποτε πλαίσιο.

Η κατηγοριοποίηση αυτή μπορεί να αποτελέσει την κατευθυντήρια γραμμή για τη διδασκαλία του ρυθμού μεταβολής σε μαθητές που δεν έχουν διδαχτεί μαθηματική ανάλυση. Οι συγγραφείς θεωρούν ότι ως αυτό το σημείο μπορούν να διδαχτούν μαθητές ως τη 10η εκπαιδευτική βαθμίδα.

Δεδομένης της σημασίας της έννοιας της συμμεταβολής στην κατανόηση των βασικών εννοιών της μαθηματικής ανάλυσης και των δυσκολιών που έχουν παρατηρηθεί σε σχέση με αυτή, έχει προταθεί από αρκετούς ερευνητές η εισαγωγή της στο σχολικό πρόγραμμα πριν από την μελέτη του διαφορικού λογισμού (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, Hsu, 2002; Moore, Paoletti & Musgrave, 2013; Oehrtman, Carlson & Thompson, 2008; Thompson, 1994). Η διαισθητική κατανόηση του

ρυθμού μεταβολής ως ταχύτητα και της κλίσης ως μέτρο της ανηφοριάς (κατηφοριάς) μπορεί να αποτελέσει το σημείο εκκίνησης για μια βαθύτερη κατανόηση του ρυθμού μεταβολής και της παραγώγου (Herbert et al., 2012). Σε αυτή την προσπάθεια σημαντικό ρόλο διαδραματίζουν οι γραφικές αναπαραστάσεις, στις οποίες οι έννοιες συνδέονται με τα φαινόμενα στα οποία αναφέρονται.

Ο Orton (1983) θεωρούσε ότι η έννοια του ρυθμού μεταβολής θα πρέπει να μεταδίδεται σε κάθε ευκαιρία πριν από τη μελέτη του διαφορικού λογισμού και όχι μόνο όταν απαιτείται για την κατανόηση της παραγώγου, τονίζοντας τη σημασία των γραφικών αναπαραστάσεων στην προσπάθεια αυτή. Βοηθητική θεωρείται και η χρήση οικείων παραδειγμάτων και τεχνολογιών πληροφορίας και επικοινωνίας. Μια άτυπη προσέγγιση του ρυθμού μεταβολής και της έννοιας της παραγωγισής μπορεί παρουσιαστεί με χρήση ΤΠΕ για την σύνδεση αριθμητικών και γραφικών αναπαραστάσεων, πριν από την ηλικία των 16 (Orton, 1983).

Προτάσεις για τη διδασκαλία του ρυθμού μεταβολής στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση

Ο Tall (2004) ορίζει τρεις διακριτούς αλλά συνδεδεμένους κόσμους στα μαθηματικά για να διαχωρίσει διαφορετικές καταστάσεις μαθηματικής σκέψης. Ο πρώτος κόσμος ονομάζεται αντιληπτικός-ενσωματικός κόσμος (conceptual-embodied world), όπου χρησιμοποιείται η φυσική αντίληψη μιας έννοιας για την διεξαγωγή νοητικών πειραμάτων για την κατασκευή νοητικών συλλήψεων μαθηματικών εννοιών. Σε αυτό το στάδιο ανήκει η διαισθητική αντίληψη των εννοιών.

Ο δεύτερος κόσμος κατά τον Tall ονομάζεται διαδικασιοεννοιολογικός-συμβολικός κόσμος (proceptual-symbolic world). Οι δραστηριότητες του προηγούμενου κόσμου μετεξελίσσονται σε έννοιες με την εισαγωγή συμβόλων. Τα σύμβολα αυτά μπορεί να εκφράζουν την έννοια ή τη διαδικασία και αναφέρονται με τον όρο procept. Η αλλαγή που συντελείται είναι από το να εφαρμόζουμε διαδικασίες στο να σκεφτόμαστε για έννοιες.

Ο τρίτος κόσμος ονομάζεται τυπικός-αξιοματικός κόσμος (formal-axiomatic world) και βασίζεται σε ιδιότητες που εκφράζονται με τυπικούς ορισμούς και αξιώματα που ορίζουν μαθηματικές δομές. Άλλες ιδιότητες και νέες έννοιες προκύπτουν με τυπικές αποδείξεις και κατασκευάζεται μια συνεκτική, συνεπαγωγική θεωρία.

Σύμφωνα με τα παραπάνω η διδασκαλία του ρυθμού μεταβολής στην Πρωτοβάθμια εκπαίδευση μπορεί να γίνει στο πλαίσιο του αντιληπτικού-ενσωματικού κόσμου. Όπως προτείνουν πολλοί ερευνητές η έννοια του ρυθμού μεταβολής μπορεί να εισαχθεί στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση με διαισθητικό και αναπαραστατικό τρόπο με έμφαση στη γραφική αναπαράσταση (Orton, 1983). Για να γίνει αυτό, η διδασκαλία θα πρέπει να εστιάζει στην έννοια και όχι σε

υπολογιστικές μεθόδους ή σε σύμβολα. Ο ρυθμός μεταβολής μπορεί να μελετηθεί μέσα από πραγματικά προβλήματα που σχετίζονται με ταχύτητα ή επιτάχυνση, αλλά και σε περιπτώσεις που η ανεξάρτητη μεταβλητή δεν είναι ο χρόνος, όπως για παράδειγμα στη σχέση όγκου και ύψους στο γέμισμα ενός δοχείου με νερό.

Ιδιαίτερη σημασία έχει η αντίληψη του ρυθμού μεταβολής μέσα από διαφορετικές αναπαραστάσεις, όπως λεκτική, γραφική, αριθμητική και ως ένα βαθμό συμβολική. Η κατανόηση των αναπαραστάσεων, αλλά και η δυνατότητα μετάβασης από τη μία αναπαράσταση στην άλλη είναι κομβικής σημασίας για την αντίληψη της έννοιας. Όπως αναφέρθηκε η γραφική αναπαράσταση ακόμα και στα ανάλογα ποσά δεν διδάσκεται στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Θα ήταν σκόπιμο να μελετηθεί η δυνατότητα κατανόησης της γραφικής παράστασης από μαθητές του δημοτικού και η δυνατότητα σύνδεσής της τόσο με αντιστοιχία ένα προς ένα όσο και με τη μεταβολή των ποσοτήτων.

Τα κλάσματα και οι αναλογίες διδάσκονται σε ικανοποιητικό βαθμό στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, αν και σε κάποιες περιπτώσεις δίνεται έμφαση στους υπολογισμούς εις βάρος της εννοιολογικής κατανόησης. Επιπλέον, η αφαίρεση εννοιών που θεωρούνται δύσκολες ενδέχεται να μεταφέρει τη δυσκολία αντίληψής τους αργότερα ή να δημιουργήσει παρανοήσεις.

Η χρήση εκπαιδευτικού λογισμικού με κατάλληλα σχεδιασμένες δραστηριότητες μπορεί να βοηθήσει στη διερεύνηση του ρυθμού μεταβολής και στην κατανόηση των αναπαραστάσεων του (Remoundou & Avgerinos, 2015). Το λογισμικό SimCalc έχει χρησιμοποιηθεί και προταθεί για χρήση από μαθητές δημοτικού με σημαντικά αποτελέσματα (Karut & Schorr, 2002).

Στο Photodentro υπάρχουν δραστηριότητες που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν από τους εκπαιδευτικούς για τη μελέτη των σχέσεων μεταξύ των μεταβολών ποσοτήτων. Δραστηριότητες σχετικά με τις γραφικές παραστάσεις μπορούν να αναπτυχθούν και σε εκπαιδευτικά λογισμικά μαθηματικών όπως το Geometer's Sketchpad και το Geogebra, με στόχο οι αναπαραστάσεις αυτές να αποτελέσουν έναν διαισθητικό τρόπο αντίληψης της αλλαγής σε ποσότητες. Στα παραπάνω λογισμικά μπορούν να αναπτυχθούν δραστηριότητες με στόχο τη δημιουργία μιας διαισθητικής εικόνας των μεταβολών ποσοτήτων, του ρυθμού μεταβολής τους και της κατασκευής του λόγου μεγεθών ως μέτρο για τη μέτρηση μιας ποσότητας (Ρεμούνδου & Αυγερινός, 2014).

Στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση στο πλαίσιο του διαδικασιο-εννοιολογικού-συμβολικού κόσμου (proceptual-symbolic world), η έννοια του ρυθμού μεταβολής μπορεί να εμπλουτιστεί με τη χρήση συμβόλων. Είναι σημαντικό να παρουσιάζονται πολλαπλές αναπαραστάσεις του ρυθμού μεταβολής και να αποσαφηνίζεται η σύνδεσή τους. Η διδασκαλία πέραν των διαδικασιών

υπολογισμού ρυθμών μεταβολής πρέπει να εστιάζει στην ίδια την έννοια και να συνδέεται με προβλήματα και εφαρμογές της από τον πραγματικό κόσμο.

Βιβλιογραφία

Ελληνική βιβλιογραφία

- Γαγάτσης, Α., Σιαμαρή, Ε. (2003). Αναπαραστάσεις και επίλυση προβλημάτων αναλογίας από μαθητές γυμνασίων Ελλάδας και Κύπρου. Πρακτικά 2ου Συνεδρίου για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση. Αθήνα: Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών & Πανεπιστήμιο Κύπρου.
- Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών (2010). Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου, Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων.
- Ρεμούνδου, Δ., Αυγερινός, Ε. (2014). Η χρήση εκπαιδευτικού λογισμικού στη δημιουργία δραστηριοτήτων ως εισαγωγή στην έννοια του ρυθμού μεταβολής. Πρακτικά 1ου Πανελλήνιου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή για το Εκπαιδευτικό Υλικό στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες, Ρόδος.
- Ρεμούνδου, Δ., Αυγερινός, Ε. (2015). Παραμένουσες γνωστικές δυσκολίες μελλοντικών δασκάλων στα κλάσματα και στις αναλογίες και η επιρροή τους στην επίλυση προβλήματος. Πρακτικά 17ου Παγκύπριου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας και Επιστήμης, Αγία Νάπα.
- ΥΠΑΔΒΜΘ (2012). Μαθηματικά Ε' Δημοτικού, Βιβλίο Μαθητή. Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος».
- ΥΠΑΔΒΜΘ (2012). Μαθηματικά ΣΤ' Δημοτικού, Βιβλίο Μαθητή. Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος».
- ΥΠΑΔΒΜΘ (2012). Μαθηματικά ΣΤ' Δημοτικού, Τετράδιο Εργασιών. Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος».

Ξένη βιβλιογραφία

- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352–378.
- Charalambous, Y. C., Pitta-Pandazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understanding of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 64(3), 293-316.
- Clark, M.R., Berenson, S.B., Cavey, L.O. (2003). A comparison of ratios and fractions and their roles as tools in proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*.

- Coe, E. (2007), Modeling teachers' thinking about rate of change, Ph.D. dissertation, Department of Mathematics and Statistics, Arizona State University.
- De Bock, D., Van Dooren, W., Verschaffel, L. (2015). Students' understanding of proportional, inverse proportional, and affine functions: two studies on the role of external representations. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(1), 47–69.
- Friel, S. N., Curcio, F. R., Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32, Iss 2, 124-159.
- Gagatsis, A., Shiakalli, M. (2004). Ability to Translate from One Representation of the Concept of Function to Another and Mathematical Problem Solving. *Educational Psychology*, 24(5), 645–657.
- Herbert, S. Pierce, R. (2011). What is rate? Does context or representation matter?. *Mathematics Education Research Journal*, 23(4), 455-477.
- Herbert, S. Pierce, R. (2012), Revealing educationally critical aspects of rate, *Educational Studies in Mathematics*, 81(1), 85-101.
- Kaput, J., Schorr, R. (2002). Changing representational infrastructures changes most everything: The case of SimCalc, algebra & calculus. In K. Heid & G. Blume (Eds.), *Research on the impact of technology on the teaching and learning of mathematics* (pp. 47–75). Mahwah: Erlbaum.
- Karplus, R., Pulos, S., Stage, E. (1983). Early adolescents' proportional reasoning on 'rate' problems. *Educational Studies in Mathematics*, 14(3), 219-233.
- Lesh, R., Post, T., Behr, M. (1998). Proportional reasoning in number concepts and operations in the middle grades. Ed. Hielbert J. and Berh M., 93-118. Reston, Va.:National Council of Teachers of Mathematics.
- Lobato, J., Thanheiser, E. (1999). Re-thinking slope from quantitative and phenomenological perspectives. Paper presented at the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Israel.
- Lobato, J., Thanheiser, E. (2002). Developing understanding of ratio-as-measure as a foundation for slope. In B. H. Litwiller (Ed.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 162–175). Reston, VA: NCTM.
- Moore, K. C., Paoletti, T., Musgrave, S. (2013). Covariational reasoning and invariance among coordinate systems. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(3), 461–473.
- Oehrtman, M., Carlson, M., Thompson, P. W. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' function understanding. In M. P. Carlson, & C. Rasmussen (Eds.),

- Making the Connection: Research and Teaching in Undergraduate Mathematics Education (pp. 27–42). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 14(3), 235-250.
- Orton, A. (1984). Understanding rate of change, *Mathematics in School*, 13 (5), 23–26.
- Post, T. R., Harel, G., Behr, M., Lesh, R. (1991). Intermediate teachers' knowledge of rational number concepts. In E. Fennema, T. P. Carpenter & S. J. Lamon (Eds.), *Integrating research on teaching and learning mathematics* (pp. 177–198). Ithaca, NY: SUNY Press.
- Remoundou, D., Avgerinos, E. (2015). “On aspects of teaching the “rate of change” in different educational grades by means of current educational software”. *International Congress on Mathematics MICOM 2015*, Athens.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36.
- Tall, D. (2004). *Thinking Through Three Worlds of Mathematics*. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway, 4, 281–288.
- Thompson, P. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 229-274.
- Thompson, P. W., Saldanha, L. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. In J. Kilpatrick, G. Martin & D. Schifter (Eds.), *Research companion to the Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 95-114). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Tourniaire, F., Pulos, S. (1985). Proportional Reasoning: A Review of the Literature. *Educational Studies in Mathematics*, 16(2), 181-204.
- Tyne, J. (2014). Slope and Derivative: Calculus Students' understanding of rates of change. Proceedings of the 17th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education.
- Ward, J., Thomas, G. (2007). What do teachers know about fractions? In *Findings from the New Zealand Numeracy Development Projects 2006* (pp. 128–138). Wellington: Learning Media.
- Weber, E., Dorko, A. (2014). Students' and experts' schemes for rate of change and its representations. *Journal of Mathematical Behavior*.