ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΤΙΚΗ ΕΥΕΛΙΞΙΑ ΣΤΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Θεοδώρα Χριστοδούλου & Αθανάσιος Γαγάτσης

Πανεπιστήμιο Κύπρου

christodoulou.theodora@ucy.ac.cy, gagatsis@ucy.ac.cy

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το παρόν κείμενο αποτελεί μια πρώτη προσπάθεια πολυδιάστατης μελέτης των γραφημάτων στατιστικής. Ειδικότερα, μελετά την κατανόηση των γραφικών παραστάσεων και συνδέει αυτή την κατανόηση με άλλες πτυχές, όπως η ικανότητα της αναπαραστατικής ευελιξίας και ο τρόπος που οι μαθητές επεξεργάζονται τις γραφικές παραστάσεις.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Είναι γενικά αποδεκτό ότι τα μαθηματικά ήταν και είναι ένα γνωστικό αντικείμενο στο οποίο οι μαθητές αντιμετωπίζουν αρκετές δυσκολίες. Ένα κεντρικό ζήτημα στην Διδακτική και την Ψυχολογία των Μαθηματικών είναι ο τρόπος που οι μαθητές μαθαίνουν, δηλαδή ο τρόπος με τον οποίο κατασκευάζουν και μετασχηματίζουν τις μαθηματικές έννοιες (Cobb et al., 1992, σελ.2). Σύμφωνα με την Κολέζα (2003), η εξέλιξη της επιστημονικής σκέψης δεν νοείται ανεξάρτητα από την εξέλιξη ιδιαίτερων συμβολισμών για την αναπαράσταση αντικειμένων και των μεταξύ τους σχέσεων.

Οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται στη μαθησιακή διαδικασία καθορίζουν σε σημαντικό βαθμό τα όσα μαθαίνει ο μαθητής και το πόσο εύκολα επιτυγχάνεται η κατανόηση των εννοιών στα μαθηματικά. Ως εκ τούτου, λειτουργούν ως χρήσιμα εργαλεία για την οικοδόμηση της μαθηματικής γνώσης, την εννοιολογική κατανόηση και την επικοινωνία μαθηματικών εννοιών, αλλά και την ανάπτυξη των ικανοτήτων των μαθητών να ερμηνεύουν μαθηματικές πληροφορίες που παρουσιάζονται σε διαφορετικά συστήματα αναπαράστασης, να οργανώνουν, να καταγράφουν και να μεταδίδουν μαθηματικές ιδέες με λόγια, εικόνες, γραφικές παραστάσεις, πίνακες ή σύμβολα (Greeno and Hall, 1997).

ΠΡΩΤΗ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

1. Επίπεδα κατανόησης γραφικών παραστάσεων και αναπαραστατική ευελιξία

1.1 Ορισμός και λειτουργίες των γραφικών παραστάσεων

Ορισμός. Γραφική παράσταση είναι οι πληροφορίες που μεταδίδονται από τη θέση του σημείου, της γραμμής ή της περιοχής σε μια δισδιάστατη επιφάνεια (Fry, 1984).

Λειτουργίες γραφικών παραστάσεων. Ένας από τους λόγους που η χρήση των γραφικών παραστάσεων είναι διάχυτη είναι ότι διευκολύνουν την κατανόηση ποσοτικών πληροφοριών (Winn, 1987). Οι γραφικές παραστάσεις και άλλες οπτικές απεικονίσεις μπορεί να είναι χρήσιμες στην απεικόνιση μιας ποσοτικής ή επιστημονικής έννοιας, ιδιαίτερα όταν η έννοια εκφράζεται ρητά (Pinker, 1990). Σύμφωνα με τον Bertin (1983), οι λειτουργίες των γραφικών παραστάσεων είναι να καταγράφουν, να επικοινωνούν και να επεξεργάζονται πληροφορίες, καθώς επίσης, στόχος μιας γραφικής παράστασης είναι η απλούστευση των πληροφοριών για την επίτευξη των σκοπών αυτών. Επιπρόσθετες λειτουργίες σύμφωνα με την Tversky (1997) είναι να προσελκύουν την προσοχή και το ενδιαφέρον των αναγνωστών, να μοντελοποιούν πραγματικούς και θεωρητικούς κόσμους, να καταγράφουν πληροφορίες, να διευκολύνουν τη μνήμη και την επικοινωνία των αναγνωστών.

1.2 Επίπεδα και διαδικασίες κατανόησης μιας γραφικής παράστασης

Σε γενικές γραμμές, η κατανόηση των πληροφοριών σε γραπτή ή συμβολική μορφή περιλαμβάνει τρία είδη συμπεριφορών (Wood, 1968), τα οποία φαίνεται να σχετίζονται με την κατανόηση της γραφικής παράστασης, και συγκεκριμένα, οι συμπεριφορές αυτές είναι η μετάφραση (translation), η ερμηνεία (interpretation) και η παρέκταση / παρεμβολή (extrapolation/ interpolation).

Η μετάφραση απαιτεί μια αλλαγή στη μορφή της επικοινωνίας. Για να γίνει μετάφραση μεταξύ γραφικών παραστάσεων και πινάκων, θα μπορούσε κανείς να περιγράψει τα περιεχόμενα ενός πίνακα δεδομένων σε λέξεις ή να ερμηνεύσει μια γραφική παράσταση σε περιγραφικό επίπεδο, σχολιάζοντας τη συγκεκριμένη δομή της γραφικής παράστασης (Wood, 1968).

Η ερμηνεία απαιτεί αναδιάταξη των υλικών και διαλογή των σημαντικών από τους λιγότερο σημαντικούς παράγοντες (Wood, 1968). Για να ερμηνευτεί μια γραφική παράσταση, μπορεί κανείς να αναζητήσει τις σχέσεις μεταξύ των τεχνικών προδιαγραφών σε μια γραφική παράσταση ή μεταξύ μιας προδιαγραφής και ενός επισημασμένου άξονα.

Η παρέκταση και παρεμβολή, θεωρούνται προεκτάσεις της ερμηνείας, και απαιτούν δηλώσεις όχι μόνο για την ουσία της επικοινωνίας, αλλά και για τον εντοπισμό ορισμένων συνεπειών. Κατά την ενασχόληση με τις γραφικές παραστάσεις, θα

μπορούσε κανείς να κάνει παρέκταση ή παρεμβολή σημειώνοντας τις τάσεις που γίνονται αντιληπτές στα δεδομένα ή καθορίζοντας τις συνέπειες (Wood, 1968).

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, τρία επίπεδα κατανόησης μιας γραφικής παράστασης έχουν προκύψει: (1) στοιχειώδες επίπεδο, που επικεντρώνεται στην εξαγωγή δεδομένων από μια γραφική παράσταση (δηλαδή, με τον εντοπισμό και τη μετάφραση), (2) ενδιάμεσο επίπεδο, που χαρακτηρίζεται από την παρεμβολή και την εύρεση σχέσεων στα δεδομένα, όπως φαίνονται στη γραφική παράσταση (δηλαδή, με την ενσωμάτωση και την ερμηνεία), και (3) προηγμένο επίπεδο, που απαιτεί παρέκταση από τα δεδομένα και ανάλυση των σχέσεων που βρίσκονται σιωπηρά σε ένα γράφημα (δηλαδή, με τη δημιουργία και την πρόβλεψη). (Friel et al., 2001)

Σε έρευνες που έγιναν σχετικά με την κατανόηση των γραφικών παραστάσεων, φάνηκαν τρεις διαδικασίες κατανόησής τους (π.χ., Carpenter and Shah, 1998).

Κατά την πρώτη διαδικασία, οι αναγνώστες θα πρέπει να κωδικοποιούν την οπτική διάταξη και να εντοπίζουν τα σημαντικά οπτικά χαρακτηριστικά, όπως μια καμπύλη γραμμή. Στη συνέχεια, θα πρέπει να συσχετίζουν τα οπτικά χαρακτηριστικά με τις εννοιολογικές σχέσεις, οι οποίες αναπαριστώνται από αυτά τα χαρακτηριστικά (Pinker, 1990). Τέλος, στην τρίτη διαδικασία κατανόησης μιας γραφικής παράστασης, οι αναγνώστες θα πρέπει να καθορίσουν το αντικείμενο αναφοράς των εννοιών που ποσοτικοποιήθηκαν και να συνδέσουν τις αναφορές με τις κωδικοποιημένες λειτουργίες (Bertin, 1983).

Αυτές οι τρεις διαδικασίες συνεπάγονται τρεις παράγοντες που παίζουν σημαντικό ρόλο στην ερμηνεία των δεδομένων από τον αναγνώστη: τα χαρακτηριστικά της οπτικής απεικόνισης (π.χ., αν είναι ραβδόγραμμα ή γράφημα γραμμής, έγχρωμη ή μαυρόασπρη), τη γνώση για τις γραφικές παραστάσεις και τη γνώση περιεχομένου (π.χ., ηλικία σε σχέση με το ύψος, χρόνος σε σχέση με την απόσταση) (Shah and Hoeffner, 2002).

1.3 Αναπαραστατική ευελιξία και κατανόηση των γραφικών παραστάσεων

Οι μαθητές στα πλαίσια του μαθήματος των μαθηματικών έρχονται καθημερινά σε επαφή με μια μεγάλη ποικιλία αναπαραστάσεων. Απαραίτητες προϋποθέσεις, όμως, για την αποτελεσματική κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας αποτελούν (α) η ικανότητα αναγνώρισης της έννοιας σε μια ποικιλία ποιοτικά διαφορετικών συστημάτων αναπαράστασης και (β) η ικανότητα μετάφρασης της έννοιας από το ένα σύστημα στο άλλο (Lesh, Post and Behr, 1987). Επιπλέον, απαραίτητη προϋπόθεση για την κατανόηση μιας έννοιας είναι η ικανότητα χειρισμού των αναπαραστάσεων, δηλαδή η ικανότητα μετασχηματισμού μέσα στο ίδιο σύστημα αναπαράστασης.

Η ικανότητα μετάβασης από μια αναπαράσταση σε άλλη και η αλληλεπίδραση - διαδικαστικά και εννοιολογικά- με τις αναπαραστάσεις θεωρείται ένα είδος ευελιξίας

της μαθηματικής σκέψης, η οποία έχει συμπεριληφθεί κάτω από τον όρο «representational versatility» (Thomas, 2008, σελ. 82).

Ακολουθώντας αυτό τον ορισμό και τις θεωρητικές θέσεις του Duval (2006), του Lesh και των συνεργατών του (1987) και του Goldin (2003), ως αναπαραστατική ευελιξία θεωρείται η ικανότητα χειρισμού των μεταβολών εντός της αναπαράστασης (ευελιξία εντός της αναπαράστασης) και των μεταβολών μεταξύ των αναπαραστάσεων (ευελιξία μεταξύ των αναπαραστάσεων) για το ίδιο μαθηματικό αντικείμενο. Συγκεκριμένα, η αναπαραστατική ευελιξία στη μάθηση μιας μαθηματικής έννοιας, μπορεί να θεωρηθεί ως ένα σύνολο τριών ικανοτήτων που ομαδοποιούνται κάτω από την εξής δομή: (α) το χειρισμό της έννοιας μέσα στο ίδιο σύστημα αναπαράστασης (π.χ., χειρισμός), (β) την αναγνώριση ορισμένων ειδών απεικονίσεων που αναφέρονται στην έννοια, η οποία δίνεται αρχικά σε ένα διαφορετικό σύστημα αναπαράστασης (δηλαδή, αναγνώριση) και (γ) μετατροπή μιας αναπαράστασης σε μια άλλη, χωρίς να αλλάζει το αντικείμενο που απεικονίζεται (δηλαδή, μετατροπή). Η ικανότητα χειρισμού αναφέρεται στην ευελιξία εντός της αναπαράστασης, καθώς οι μετασχηματισμοί που απαιτεί είναι εσωτερικοί, δηλαδή, πραγματοποιούνται μέσα στο ίδιο σύστημα αναπαράστασης. Οι ικανότητες της αναγνώρισης και της μετατροπής αναφέρονται στην ευελιξία μεταξύ των αναπαραστάσεων, καθώς και οι δύο περιλαμβάνουν αλλαγή του συστήματος αναπαράστασης. Η διαφορά των δύο ικανοτήτων έγκειται στο ότι η ικανότητα μετατροπής περιλαμβάνει την κατασκευή της αναπαράστασης-στόχος για το ίδιο αντικείμενο, το οποίο απεικονίζεται στην αρχική αναπαράσταση, ενώ στην ικανότητα αναγνώρισης δεν συμβαίνει το ίδιο. Το κοινό χαρακτηριστικό των τριών ικανοτήτων είναι ότι όλοι περιλαμβάνουν αναπαραστατικούς μετασχηματισμούς, οι οποίοι μπορούν να θεωρηθούν ως ενδείξεις για την ύπαρξη αναπαραστατικής ευελιξίας σε ένα μαθηματικό τομέα. Αυτός ο ορισμός της αναπαραστατικής ευελιξίας προορίζεται για καταστάσεις όπου οι μαθητές έχουν ήδη διδαχθεί να εργάζονται με αναπαραστάσεις σε ένα συγκεκριμένο μαθηματικό τομέα. (Gagatsis et al., 2011).

ΔΕΥΤΕΡΗ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

Επεξεργασία γραφικών παραστάσεων και αναπαραστατική ευελιξία

Όπως αναγράφεται στο ελληνικό βιβλίο των Μαθηματικών Στ΄ τάξης για τον εκπαιδευτικό, «οι γραφικές παραστάσεις χρησιμοποιούνται αποτελεσματικά για την οπτικοποίηση δεδομένων, για την εξαγωγή συμπερασμάτων, καθώς και για την επεξήγηση ορισμένων εφαρμογών» (βιβλίο Μαθηματικών Ελλάδας). Αν και αυτό φαίνεται απλό, εντούτοις οι ερευνητές έχουν δείξει ότι, οι μαθητές συχνά αδυνατούν να αντιληφθούν τις θεμελιώδεις έννοιες και τις λειτουργίες μιας γραφικής παράστασης, γεγονός που μπορεί να οδηγήσει στην εμφάνιση χάσματος ανάμεσα σε αυτό που ένας δάσκαλος πιστεύει ότι οι μαθητές αντιλήφθηκαν και σε εκείνο που οι μαθητές πραγματικά αντιλήφθηκαν (Garfield, 1995). Έρευνες έδειξαν (Van Dyke and White, 2004) ότι το χάσμα αυτό οφείλεται στο ότι οι μαθητές δεν ξέρουν σε ποια

σημεία της γραφικής παράστασης να εστιάσουν την προσοχή τους ούτε πώς να «διαβάσουν» ένα γράφημα.

Έρευνα που βρίσκεται υπό εξέλιξη, έχει ως στόχο να διερευνήσει κατά πόσο η ικανότητα της αναπαραστατικής ευελιξίας συνδέεται με την ικανότητα ερμηνείας γραφικών παραστάσεων. Συγκεκριμένα, η έρευνα στοχεύει να περιγράψει τον τρόπο με τον οποίο οι Κύπριοι μαθητές Β΄ και Γ΄ τάξης δημοτικού επεξεργάζονται έργα αναγνώρισης, μετάφρασης και ερμηνείας γραφικών παραστάσεων -εικονόγραμμα και ραβδόγραμμα-. Οι ικανότητες της αναγνώρισης και της μετάφρασης αποτελούν δύο συνιστώσες της αναπαραστατικής ευελιξίας, ενώ η ικανότητα της ερμηνείας αποτελεί μια τρίτη διάσταση, η οποία διερευνάται κατά πόσο συνδέεται με την ικανότητα της αναπαραστατικής ευελιξίας των μαθητών.

Μέχρι στιγμής, από την έρευνα αυτή, φάνηκε ότι οι μαθητές χειρίζονται αρκετά όμοια τα έργα αναπαράστασης δεδομένων σε δύο περιπτώσεις: όταν τα έργα περιλαμβάνουν την ίδια γραφική παράσταση (εικονόγραμμα ή ραβδόγραμμα) και όταν τα έργα εξετάζουν την ίδια ικανότητα (αναγνώριση, μετάφραση ή ερμηνεία). Επιπλέον, τα έργα που συνοδεύονται από ραβδόγραμμα και τα έργα μετάφρασης, φάνηκε να έχουν τη μεγαλύτερη δυσκολία για τους μαθητές. Σχετικά με τις διαφορές μεταξύ των μαθητών στις δύο τάξεις, παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές της Γ΄ τάξης απάντησαν με μεγαλύτερη συνέπεια στα έργα του δοκιμίου, ιδιαίτερα σε αυτά που συνοδεύονταν από ραβδογράμματα.

Όσον αφορά τη σύνδεση μεταξύ της ικανότητας ερμηνείας γραφικών παραστάσεων και την ικανότητα της αναπαραστατικής ευελιξίας η έρευνα έδειξε ότι η επίδοση των μαθητών στα έργα ερμηνείας μπορεί να ερμηνεύσει 47% της διασποράς της επίδοσης των μαθητών στα έργα αναγνώρισης και μετάφρασης γραφικών παραστάσεων. Αυτό σημαίνει ότι η ικανότητα ερμηνείας γραφικών παραστάσεων μπορεί να προβλέψει την ικανότητα αναπαραστατικής ευελιξίας των μαθητών σε επίπεδο 47%, καθώς επίσης η συνεισφορά της διάστασης της ερμηνείας γραφικών παραστάσεων στην πρόβλεψη της ικανότητας της αναπαραστατικής ευελιξίας είναι στατιστικά σημαντική ($F(1,148)=133.42$, $p<0.001$).

Ειδικότερα, η ικανότητα ερμηνείας εικονογράμματος μπορεί να προβλέψει την ικανότητα αναπαραστατικής ευελιξίας των μαθητών σε έργα με εικονογράμματα σε επίπεδο 17%, καθώς επίσης η συνεισφορά της διάστασης της ερμηνείας εικονογράμματος στην πρόβλεψη της ικανότητας της αναπαραστατικής ευελιξίας σε έργα με εικονογράμματα είναι στατιστικά σημαντική ($F(1,148)=30.78$, $p<0.001$).

Όμοια, η ικανότητα ερμηνείας ραβδογράμματος μπορεί να προβλέψει την ικανότητα της αναπαραστατικής ευελιξίας των μαθητών σε έργα με ραβδογράμματα σε επίπεδο 39%. Και σε αυτή την περίπτωση, η συνεισφορά της διάστασης της ερμηνείας ραβδογράμματος είναι στατιστικά σημαντική ($F(1,148)=93.5$, $p<0.001$) στην πρόβλεψη της ικανότητας της αναπαραστατικής ευελιξίας των μαθητών σε έργα με ραβδογράμματα.

Στην ίδια έρευνα πραγματοποιήθηκαν ατομικές συνεντεύξεις σε τρεις μαθητές από κάθε τάξη, ώστε να εντοπιστούν οι διεργασίες που ακολουθούν οι μαθητές των δύο τάξεων όταν επιλύουν τα συγκεκριμένα έργα γραφικών παραστάσεων. Από τις συνεντεύξεις παρατηρήθηκε ότι, σε κάθε τάξη οι μαθητές ακολουθούν άλλοτε παρόμοιες και άλλοτε διαφορετικές διεργασίες για να επιλύσουν τα έργα. Συγκεκριμένα, κανένας από τους μαθητές της Β΄ τάξης δεν διάβαζε ξανά το πρόβλημα για να βρει την απάντηση, ενώ οι μαθητές της Γ΄ τάξης ξαναδιάβαζαν το πρόβλημα μόνοι τους προτού απαντήσουν. Όλοι οι μαθητές, για να διαβάσουν ένα εικονόγραμμα μετρούσαν τις εικόνες στο εικονόγραμμα. Οι μαθητές της Β΄ τάξης, για να διαβάσουν ένα ραβδόγραμμα έβλεπαν τον αριθμό στο πλάι της γραφικής παράστασης, εκτός από μια περίπτωση στην οποία η μια μαθήτρια της Β΄ τάξης μέτρησε τα κουτάκια στο ραβδόγραμμα. Κανένας από τους μαθητές της Γ΄ τάξης δεν μέτρησε τα κουτάκια για να διαβάσει το ραβδόγραμμα, αλλά όλοι έβλεπαν τον αριθμό στον κατακόρυφο άξονα της γραφικής παράστασης. Αυτό εξηγείται στην επόμενη ενότητα, βάσει της θεωρίας της Tversky (1997), σχετικά με την αρχή της κατεύθυνσης στο σχεδιασμό των γραφικών παραστάσεων.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η μελέτη γραφημάτων στατιστικής πρέπει να είναι πολυδιάστατη. Από τη μια πλευρά η κατανόηση μιας γραφικής παράστασης συνδέεται με συμπεριφορές όπως, η μετάφραση (translation), η ερμηνεία (interpretation) και η παρέκταση / παρεμβολή (extrapolation/interpolation) (Wood, 1968). Θα λέγαμε, λοιπόν ότι η συμπεριφορά της μετάφρασης ταυτίζεται με την ικανότητα μετατροπής μιας αναπαράστασης σε άλλη, ενώ η συμπεριφορά της ερμηνείας συνδέεται με την ικανότητα αναγνώρισης μιας μαθηματικής έννοιας σε μια αναπαράσταση διαφορετική από την αρχική, διότι για να επιτευχθεί η αναγνώριση, απαιτείται ερμηνεία της αρχικής αναπαράστασης. Όμοια, η συμπεριφορά της παρέκτασης/παρεμβολής συνδέεται με την ικανότητα χειρισμού, διότι απαιτεί επεξεργασία της έννοιας μέσα στο ίδιο σύστημα αναπαράστασης. Από την άλλη, οι συμπεριφορές αυτές βρίσκονται σε στενή αλληλεπίδραση με την αναπαραστατική ευελιξία (Gagatsis et al., 2011).

Διάφοροι συγγραφείς έχουν προτείνει ταξινομίες κατανόησης και σχεδιασμού γραφικών παραστάσεων. Έτσι, η Tversky (1997) προτείνει για το σχεδιασμό των γραφικών παραστάσεων δύο αρχές: (1) τη χρήση των χωρικών μεταφορών (spatial metaphors) και (2) τη χρήση της κατεύθυνσης (directionality).

Χωρικές μεταφορές (spatial metaphors). Οι γραφικές παραστάσεις και τα διαγράμματα μεταφέρουν ποιοτικές και ποσοτικές πληροφορίες, χρησιμοποιώντας φυσικές αντιστοιχίες και χωρικές μεταφορές, κάποιες από τις οποίες εφαρμόζονται σε απλή διάταξη στοιχείων και άλλες σε χωρικά (ειδικά) σημεία. Οι πιο βασικές μεταφορές είναι η εγγύτητα. Η εγγύτητα στο χώρο χρησιμοποιείται για να δείξει την εγγύτητα σε μια άλλη ιδιότητα, όπως ο χρόνος και η τιμή, καθώς επίσης, για να

δείξει ότι το εμβαδόν των στοιχείων σε ένα γράφημα πρέπει να αντιστοιχεί σε μια ιδιότητα της αναπαριστώμενης μεταβλητής, όπως η συχνότητα ή το ποσοστό.

Κατεύθυνση (directionality). Η δεύτερη αρχή σχεδιασμού δηλώνει ότι οι γραφικές παραστάσεις τείνουν να διατάσσουν τα στοιχεία με διαφορετικές κατευθύνσεις, συνήθως είτε κατακόρυφα είτε οριζόντια. Η κατακόρυφη διάταξη υπερισχύει της οριζόντιας και αυτό είναι ριζωμένο στην αντίληψη του ατόμου (Franklin and Tversky 1990). Γι' αυτό άλλωστε, οι άνθρωποι τείνουν να επικεντρώνονται περισσότερο στην κατακόρυφη παρά στην οριζόντια διάσταση μιας γραφικής παράστασης, θεωρώντας ότι η κατακόρυφη διάσταση έχει μεγαλύτερη σημασία στην αλληλεπίδραση με τον κόσμο (π.χ. η βαρύτητα λειτουργεί κατακόρυφα). Σε αυτή την κατακόρυφη διάσταση, η κορυφή θεωρείται φυσικά ως κάτι περισσότερο ή καλύτερο από το κάτω μέρος. Οι άνθρωποι μεγαλώνουν σε μια κατακόρυφη κατεύθυνση, ενώ αν κάποιος κάνει μια στίβη από αντικείμενα, η στίβη θα είναι ψηλότερη και ούτω καθεξής. Αυτό σημαίνει ότι οι άνθρωποι έχουν την τάση να συνδέουν το ψηλότερο με το περισσότερο ή το καλύτερο.

Αυτές οι αρχές σχεδιασμού σχετικά με τη χρήση του χώρου και της κατεύθυνσης στις γραφικές παραστάσεις, μπορούν να εφαρμοστούν σε γραφικές αναπαραστάσεις για τις κατανομές των δεδομένων, για να εξηγήσουν πώς οι άνθρωποι ερμηνεύουν αυτές τις αναπαραστάσεις και γιατί ορισμένες αναπαραστάσεις είναι πιο δύσκολο να ερμηνευτούν από ό, τι άλλες αναπαραστάσεις. Επομένως, οι αρχές σχεδιασμού των γραφικών παραστάσεων της Tversky (1997) παρέχουν ένα γόνιμο πλαίσιο για να κατανοήσουμε πώς οι μαθητές τείνουν να ερμηνεύουν ή να παρερμηνεύουν τις αναπαραστάσεις.

Ισχυριζόμαστε ότι μελλοντικές έρευνες για την κατανόηση των γραφημάτων στατιστικής πρέπει να βασίζονται στη θεωρία της αναπαραστατικής ευελιξίας και σε αρχές σχεδιασμού των γραφικών παραστάσεων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bertin, J. (1983). *Semiology of Graphics: Diagrams, Networks, Maps*. University of Wisconsin Press, Madison (French edn., 1967).

Carpenter, P. A., & Shah, P. (1998). A model of the perceptual and conceptual processes in graph comprehension. *Journal of Experimental Psychology: Applied 4*, 75–100.

Cobb, P., Yackel, E. & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in Mathematical Education. *Journal of Research in Mathematics Education, 23(1)*, 2-33.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103- 131.

Franklin, N. & Tversky, B. (1990). Searching imagined environments. *Journal of Experimental Psychology: General*, *119*, 63-76.

Friel, S. N., Curcio F. R. & Bright G. W., (2001). Making Sense of Graphs: Critical Factors Influencing Comprehension and Instructional Implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32(2)*, 124–158.

Fry, E. (1984). *A theory of graphs for reading comprehension and writing communication.* New Brunswick, NJ: Rutgers University. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 240 528)

Gagatsis, A., Deliyianni, E., Elia, I. & Panaoura, A. (2011). Explorer la flexibilité : le cas du domaine numerique. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *16*, 21-38.

Garfield, J. (1995). How students learn statistics. *International Statistical Review*, *63*, 25-34.

Goldin, G. A. (2003). Representation in school mathematics: A unifying research perspective. In J. Kilpatrick, W. G. Martin and D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 275-285). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Greeno, J. G., & Hall, R. P. (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms. *Phi Delta Kappan*, *78(5)*, 361-367.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Pinker, S. (1990). A theory of graph comprehension. In Freedle, R. (ed.), *Artificial Intelligence and the Future of Testing*, Erlbaum, Hillsdale, NJ, (pp. 73–126).

Shah, P. & Hoeffner, J., 2002. Review of Graph Comprehension Research: Implications for Instruction. *Educational Psychology Review*,14(1), 47-69.

Thomas, M. O. J. (2008). Developing versatility in mathematical thinking. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *7*(2), 71-91.

Tversky, B. (1997). Cognitive Principles of Graphic Displays. *AAAI Technical Report FS-97-03*, 116-124.

Van Dyke, F., & White, A. (2004). *Making Graphs Count. Mathematics Teaching*, *188*, 42-50.

Winn, B. (1987). Charts, graphs, and diagrams in educational materials. In Willows, D., and Houghton, H. A. (eds.), *The Psychology of Illustration*, Springer, New York.

Wood, R. (1968). Objectives in the teaching of mathematics. *Educational Research*, *10*, 83–98.

Βιβλίο Μαθηματικών Ελλάδας Στ΄ Δημοτικού για τον εκπαιδευτικό και τον μαθητή. Ανακτήθηκε από http://www.pi-schools.gr/books/dimotiko/

Κολέζα, Ε. (2003). Νοητικές Διεργασίες Ανάπτυξης Γεωμετρικών Εννοιών. Στα πρακτικά *2ου Συνεδρίου για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση*, 11-13 Απριλίου, 2003. Ανακτήθηκε από http://www.math.uoa.gr/me/conf2/papers.html