

## Η συμβολή της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης (RME) στην ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων μαθητών Γυμνασίου: Μια έρευνα δράσης με αξιοποίηση αυθεντικών προβλημάτων

Αθηνά Σφυράκη, Ευγένιος Αυγερινός

### Περίληψη

Η παρούσα εργασία εξετάζει τη συμβολή της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης (Realistic Mathematics Education – RME) στην ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων μαθητών Γυμνασίου, με έμφαση στη Γεωμετρία και στην αξιοποίηση αυθεντικών προβλημάτων. Αφετηρία της εργασίας αποτελεί η διαπιστωμένη δυσκολία των μαθητών να συνδέσουν γεωμετρικές έννοιες με καταστάσεις της πραγματικής ζωής και να αναπτύξουν ουσιαστικές στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων, σε ένα σχολικό πλαίσιο όπου κυριαρχούν τυποποιημένες ασκήσεις και τυποκεντρική διδασκαλία. Στο θεωρητικό μέρος παρουσιάζονται οι βασικές αρχές της RME, η έννοια της προοδευτικής μαθηματοποίησης, ο ρόλος των αυθεντικών προβλημάτων, καθώς και οι δυσκολίες των μαθητών στη Γεωμετρία, όπως αναδεικνύονται από τη διεθνή βιβλιογραφία. Στη συνέχεια περιγράφεται ο σχεδιασμός μιας έρευνας δράσης που προβλέπεται να υλοποιηθεί σε τάξη Γυμνασίου, με αξιοποίηση δραστηριοτήτων βασισμένων σε ρεαλιστικά και νησιωτικά συμφραζόμενα. Παρουσιάζονται ο σκοπός, τα ερευνητικά ερωτήματα, η μεθοδολογία και τα εργαλεία συλλογής δεδομένων, καθώς και προκαταρκτικά συμπεράσματα από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση. Η εργασία καταλήγει ότι η RME αποτελεί πολλά υποσχόμενη προσέγγιση για τη βελτίωση της διδασκαλίας της Γεωμετρίας και τη νοηματοδότηση των μαθηματικών στην ελληνική σχολική πραγματικότητα.

### Abstract

This paper examines the contribution of Realistic Mathematics Education (RME) to the development of mathematical skills among lower secondary school students, with a particular focus on Geometry and the use of authentic problem situations. The study originates from the well-documented difficulties students face in connecting geometric concepts to real-life contexts and in developing meaningful problem-solving strategies within a school environment dominated by standardized exercises and formula-driven instruction. The theoretical section outlines the core principles of RME, the notion of progressive mathematization, the role of authentic problems, and the common challenges students encounter in Geometry, as identified in international literature. The paper then presents the design of an action research project to be implemented in a lower secondary classroom, incorporating learning activities grounded in realistic and island-based contexts. The purpose of the study, the research questions, the methodological framework, and the intended data-collection tools are described in detail, alongside preliminary insights derived from the literature review. Overall, the paper argues that RME is a highly promising approach for improving the teaching of Geometry and for fostering the meaningful learning of mathematics within the Greek educational setting.

*Keywords: Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση (RME), Αυθεντικά προβλήματα, Έρευνα δράσης, Νίσυρος, Επίλυση προβλήματος, Μαθηματική εννοιολογική κατανόηση*

### Εισαγωγή

Η μαθηματική εκπαίδευση στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο στη διαμόρφωση των βασικών και ανώτερων δεξιοτήτων των μαθητών, όπως η επίλυση προβλημάτων, η μαθηματική σκέψη και η εννοιολογική κατανόηση. Ωστόσο, η διεθνής και εγχώρια βιβλιογραφία αναδεικνύει ότι οι μαθητές συναντούν σταθερά δυσκολίες ιδιαίτερα στον τομέα της Γεωμετρίας, τόσο στη σύνδεση των εννοιών με πραγματικά προβλήματα όσο και στη μεταφορά της γνώσης σε διαφορετικά πλαίσια (Aksu & Colak, 2019). Οι παραδοσιακές προσεγγίσεις διδασκαλίας, οι οποίες δίνουν έμφαση στην τυπική παρουσίαση κανόνων και διαδικασιών, συχνά αποτυγχάνουν να υποστηρίξουν την ανάπτυξη βαθύτερης εννοιολογικής κατανόησης. Σε αυτό το πλαίσιο, η Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση (Realistic Mathematics Education – RME) προτείνεται διεθνώς ως μια διδακτική προσέγγιση που αντιμετωπίζει αυτά τα κενά. Η RME, η οποία αναπτύχθηκε στο Freudenthal Institute, στηρίζεται στην αρχή ότι τα μαθηματικά αποτελούν «ανθρώπινη δραστηριότητα» που οι μαθητές πρέπει να ανακαλύπτουν μέσω νοηματοδοτημένων καταστάσεων (Freudenthal, 1991). Σύμφωνα με την προσέγγιση αυτή, οι μαθητές εκκινούν από πλούσιες, ρεαλιστικές καταστάσεις – όχι απαραίτητα «πραγματικές», αλλά νοητικές – και προχωρούν σταδιακά στη μαθηματοποίηση μέσα από διαδικασίες που οδηγούν από το άτυπο στο τυπικό επίπεδο (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014). Η διεθνής βιβλιογραφία τεκμηριώνει ότι η RME

ενισχύει σημαντικά τόσο την επίλυση προβλήματος όσο και τη γενικότερη μαθηματική επίδοση των μαθητών. Για παράδειγμα, μελέτες έχουν δείξει ότι η ενεργός εμπλοκή των μαθητών σε αυθεντικές καταστάσεις προάγει την ανάπτυξη στρατηγικών, την αυτορρύθμιση και την ικανότητα σύνδεσης της άτυπης γνώσης με μαθηματικές έννοιες υψηλού επιπέδου (Da, 2023). Στη Γεωμετρία ειδικότερα, η RME προσφέρει ένα πλαίσιο που επιτρέπει στους μαθητές να κατανοήσουν τις έννοιες όχι ως αφηρημένες οντότητες, αλλά ως εργαλεία ερμηνείας και επίλυσης προβλημάτων που σχετίζονται με την πραγματικότητα ή με καταστάσεις που μπορούν να φανταστούν (Aksu & Colak, 2019). Παρά τη σημαντική διάδοση της RME διεθνώς, στην ελληνική πραγματικότητα η αξιοποίησή της παραμένει περιορισμένη, ειδικά στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και ιδιαίτερα στη Γεωμετρία. Το γεγονός αυτό δημιουργεί ένα εμφανές ερευνητικό κενό, δεδομένου ότι πλήθος μελετών τονίζουν τη σημασία της αυθεντικής και βιωματικής μάθησης για την υπέρβαση των παραδοσιακών διδακτικών δυσκολιών. Η ανάγκη για εκπαιδευτικές παρεμβάσεις που συμβάλλουν στην κατανόηση και εφαρμογή των γεωμετρικών εννοιών αναδεικνύεται επιτακτικά, ιδίως σε περιβάλλοντα όπου οι μαθητές παρουσιάζουν μειωμένη αυτοπεποίθηση ή περιορισμένη εμπειρία στη μαθηματική μοντελοποίηση. Η παρούσα διδακτορική έρευνα επιδιώκει να διερευνήσει συστηματικά τη συμβολή της RME στην ανάπτυξη των μαθηματικών δεξιοτήτων μαθητών Γυμνασίου μέσω αυθεντικών γεωμετρικών προβλημάτων, αξιοποιώντας το μεθοδολογικό πλαίσιο της έρευνας δράσης. Η επιλογή της έρευνας δράσης επιτρέπει μια κυκλική διαδικασία σχεδιασμού, εφαρμογής, παρατήρησης και αναστοχασμού, καθιστώντας την κατάλληλη για την εξερεύνηση της επίδρασης και της λειτουργικότητας της RME σε πραγματικές συνθήκες διδασκαλίας. Η εργασία αυτή, στο στάδιο της πρώτης ερευνητικής φάσης, παρουσιάζει το θεωρητικό υπόβαθρο, το ερευνητικό πρόβλημα, τα ερωτήματα και τον αρχικό σχεδιασμό της μελέτης. Παράλληλα, επιχειρεί να τοποθετήσει την έρευνα σε ένα ευρύτερο εκπαιδευτικό και θεωρητικό πλαίσιο, αναδεικνύοντας τόσο τη σημασία της RME όσο και τη δυναμική της συμβολή στη βελτίωση της μαθησιακής διαδικασίας στη Γεωμετρία.

## **Θεωρητικό πλαίσιο**

### ***Η ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση (RME)***

Η Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση (Realistic Mathematics Education – RME) αποτελεί μία από τις πλέον αναγνωρισμένες σύγχρονες προσεγγίσεις στη διδακτική των μαθηματικών. Αναπτύχθηκε από τον Hans Freudenthal τη δεκαετία του 1970, με κεντρική αρχή ότι «τα μαθηματικά αποτελούν ανθρώπινη δραστηριότητα που οι μαθητές πρέπει να ανακαλύπτουν» (Freudenthal, 1991). Σε αντίθεση με τις παραδοσιακές διδακτικές προσεγγίσεις — όπου η μάθηση εστιάζει στην αναπαραγωγή έτοιμων κανόνων, τύπων και αλγορίθμων — η RME τονίζει την ενεργό συμμετοχή του μαθητή στη διαδικασία οικοδόμησης της γνώσης. Στο πλαίσιο της RME, ο όρος «ρεαλιστικό» δεν περιορίζεται σε πραγματικές ή καθημερινές καταστάσεις. Αναφέρεται σε κάθε κατάσταση που είναι νοητικά προσιτή και έχει νόημα για τον μαθητή, λειτουργώντας ως γέφυρα μεταξύ εμπειρίας και μαθηματικών εννοιών (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014). Η σχετική έρευνα των τελευταίων ετών επιβεβαιώνει ότι η RME ενισχύει την εννοιολογική κατανόηση και τις στρατηγικές επίλυσης προβλήματος (Anjarwati et al., 2025· Kaymak & Bagzhan, 2023), ενώ παράλληλα συμβάλλει στην ανάπτυξη μαθηματικού γραμματισμού και δεξιοτήτων υψηλού επιπέδου (Fauzan, 2024· Sutarni, 2023). Επιπλέον, σύγχρονες μελέτες δείχνουν ότι η RME υποστηρίζει τη μετάβαση σε μαθησιακά περιβάλλοντα που αξιοποιούν ψηφιακά εργαλεία και ρεαλιστικοποιημένες μαθηματικές δραστηριότητες (Realistic Mathematics Education in Digital Era Elementary Schools, 2023). Η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών αποδεικνύεται επίσης κρίσιμο στοιχείο, καθώς τα RME-βασισμένα εργαστήρια ενισχύουν τον σχεδιασμό και την εφαρμογή διδακτικών παρεμβάσεων υψηλής ποιότητας (Khairunnisak, 2024). Επιπλέον, πρόσφατες δημοσιεύσεις αναδεικνύουν τη θετική συμβολή της RME στη διδασκαλία της γεωμετρίας και της χωρικής σκέψης σε μαθητές μέσης εκπαίδευσης (Nur Hakim et al., 2024) καθώς και στη βελτίωση δεξιοτήτων επίλυσης προβλήματος (Realistic Mathematics Education Approach on Improving Problem-Solving Skills of Students, 2022). Έτσι, οι μαθητές δεν αντιμετωπίζονται ως παθητικοί δέκτες μαθηματικών εννοιών, αλλά ως ενεργοί φορείς που διαμορφώνουν, εξερευνούν και βελτιώνουν τις δικές τους στρατηγικές και μαθηματικές αναπαραστάσεις. Η RME ευθυγραμμίζεται με την παιδαγωγική αρχή ότι η γνώση αναδύεται μέσα από νοηματοδοτημένες, αυθεντικές καταστάσεις.

Στο πλαίσιο αυτό, υπηρεσίες του Ελληνικού Δημοσίου όπως η Κτηματική Υπηρεσία του Δημοσίου — υπεύθυνη για τον καθορισμό ορίων αιγιαλού, τον υπολογισμό εμβαδών δημόσιων εκτάσεων και τον έλεγχο χωρικών δεδομένων — αποτελούν πραγματικές πηγές μαθηματικών προβλημάτων σχετικών με γεωμετρία,

αναλογίες, μετρήσεις, χαρτογράφηση και χωρική μοντελοποίηση. Οι διαδικασίες αυτές, που περιλαμβάνουν μετρήσεις, υπολογισμούς εμβαδών, αξιολόγηση ορίων και γεωχωρική ανάλυση, αναδεικνύουν με σαφήνεια τον τρόπο με τον οποίο τα μαθηματικά λειτουργούν ως εργαλεία ερμηνείας, τεκμηρίωσης και λήψης αποφάσεων — στοιχείο απόλυτα εναρμονισμένο με τη φιλοσοφία της RME (Anjarwati et al., 2025; Nur Hakim et al., 2024).

### **Αναλυτική ανάπτυξη των αρχών της RME με παραδείγματα**

Η RME στηρίζεται στην ιδέα ότι η μαθηματική μάθηση ξεκινά από καταστάσεις που έχουν νόημα για τον μαθητή και συνδέονται με το άμεσο περιβάλλον του. Οι αρχές της δεν αποτελούν αφηρημένες θεωρητικές διατυπώσεις· αντίθετα, μετατρέπονται σε συγκεκριμένες διδακτικές πρακτικές που μπορούν να εφαρμοστούν σε ποικίλα περιβάλλοντα — αστικά, αγροτικά ή νησιωτικά — αξιοποιώντας πραγματικά φαινόμενα και χωρικές εμπειρίες των μαθητών. Πέρα από φυσικά φαινόμενα, όπως το ηφαίστειο της Νισύρου, ή τοποθεσίες όπως παιδικές χαρές και νησιωτικά πάρκα, σημαντικές πηγές μαθηματικών δεδομένων μπορούν να προκύψουν από υπηρεσίες όπως η **Κτηματική Υπηρεσία του Δημοσίου**, η οποία διαχειρίζεται πληροφορίες που αφορούν:

- τον καθορισμό ορίων αιγιαλού και παραλίας,
- τον υπολογισμό επιφανειών δημόσιας γης,
- τη χαρτογράφηση εκτάσεων,
- τον έλεγχο αυθαίρετων κατασκευών,
- την εκτίμηση αποστάσεων και χωρικών σχέσεων.

Όλα αυτά αποτελούν αυθεντικά μαθηματικά προβλήματα που μπορούν να ενταχθούν σε διδακτικές δραστηριότητες RME, κινητοποιώντας τη μαθηματική διερεύνηση μέσα από χωρικά, γεωμετρικά και αναλογικά δεδομένα.

### **Φαινόμενα ως σημεία εκκίνησης (Phenomenological Exploration)**

Στη RME, η μάθηση ξεκινά από φαινόμενα που οι μαθητές αναγνωρίζουν ως οικεία. Το «φαινόμενο» λειτουργεί ως πύλη προς τη μαθηματική διερεύνηση, δίνοντας στον μαθητή έναν λόγο να ασχοληθεί με τις έννοιες.

Παράδειγμα 1: Το ηφαίστειο της Νισύρου

Ένα φυσικό τοπίο όπως ο κρατήρας Στέφανος προσφέρει πλούσιες ευκαιρίες για μαθηματική διερεύνηση:

- αναγνώριση του κυκλικού σχήματος της καλντέρας,
- εκτίμηση της διαμέτρου από εικόνες ή χάρτες,
- υπολογισμός της περιμέτρου ή της διαδρομής γύρω από τον κρατήρα,
- συσχέτιση υψομετρικών διαφορών με κλίσεις και μήκη μονοπατιών.
- Οι μαθητές εισέρχονται στο πρόβλημα μέσω της εμπειρίας τους: μια φωτογραφία, μια επίσκεψη ή μια συζήτηση αρκεί για να θέσει τη βάση ενός πλήρως ρεαλιστικού μαθηματικού μοντέλου.

Παράδειγμα 2: Πάρκα και δημόσιοι χώροι νησιών

Σε ένα νησιωτικό πάρκο (π.χ. Σύρου, Ρόδου, Καλύμνου) οι μαθητές μπορούν να αναλύσουν:

- το σχήμα της παιδικής χαράς (ορθογώνιο, κύκλος, σύνθετο σχήμα),
- τη γεωμετρία των διαδρομών,
- τη διάταξη των δέντρων σε πλέγμα ή ακανόνιστο μοτίβο.

Αυτά τα φαινόμενα λειτουργούν ως αυθεντικά σημεία εκκίνησης για τη διδασκαλία εμβαδών, περιμέτρων, συμμετριών και χαρτογραφικών αναπαραστάσεων.

Παράδειγμα 3: Δραστηριότητες της Κτηματικής Υπηρεσίας

Η Κτηματική Υπηρεσία προσφέρει ένα εξαιρετικό πλαίσιο αυθεντικών ρεαλιστικών προβλημάτων, όπως:

- πώς καθορίζονται τα όρια αιγιαλού και παραλίας με βάση γεωμετρικές μετρήσεις,
- πώς υπολογίζεται το εμβαδόν μιας δημόσιας έκτασης προς παραχώρηση ή προστασία,
- πώς εντοπίζεται μια αυθαίρετη κατασκευή με σύγκριση σχεδίου – πραγματικότητας,

- πώς ελέγχεται η νομιμότητα χρήσης χώρου (π.χ. ομπρέλες – ξαπλώστρες σε παραλία).

Οι μαθητές μπορούν να εργαστούν με πραγματικού τύπου δεδομένα, όπως:

- χάρτες,
- αεροφωτογραφίες,
- συντεταγμένες,
- διαγράμματα ορίων.

Αυτές οι δραστηριότητες ενισχύουν την κατανόηση της Γεωμετρίας ως εργαλείου που χρησιμοποιείται σε κρίσιμες δημόσιες διαδικασίες, συνδέοντας τη σχολική γνώση με τον πραγματικό κόσμο.

### **Προοδευτική μαθηματικοποίηση (Progressive Mathematization)**

Η προοδευτική μαθηματικοποίηση αποτελεί βασικό μηχανισμό της RME και περιγράφει τη μετάβαση από την αυθόρμητη, καθημερινή σκέψη των μαθητών σε πιο τυπικές μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες. Σύμφωνα με τον Freudenthal (1991), η μαθηματικοποίηση είναι η διαδικασία μέσω της οποίας ο μαθητής «οργανώνει» την πραγματικότητα με μαθηματικούς όρους, αναπτύσσοντας στρατηγικές και μοντέλα όλο και πιο συστηματικά.

Η RME διακρίνει δύο μορφές μαθηματικοποίησης:

α) Οριζόντια μαθηματικοποίηση (Horizontal Mathematization)

Σε αυτό το στάδιο, ο μαθητής μεταφράζει μια πραγματική κατάσταση σε μαθηματική αναπαράσταση. Στόχος δεν είναι η άμεση χρήση τυπικών τύπων, αλλά η ανάπτυξη μοντέλων που έχουν νόημα για τον ίδιο.

Παράδειγμα 1: Το ηφαίστειο της Νισύρου

Η οριζόντια μαθηματικοποίηση εμφανίζεται όταν οι μαθητές:

- αναγνωρίζουν τον κρατήρα ως κυκλικό σχήμα,
- εκτιμούν τη διάμετρο χρησιμοποιώντας φωτογραφίες, χάρτες ή κλίμακες,
- προσπαθούν να υπολογίσουν την περίμετρο ή το εμβαδό με άτυπους τρόπους, όπως μέτρηση βημάτων σε μια εκπαιδευτική επίσκεψη.

Σε αυτό το στάδιο, οι στρατηγικές μπορεί να είναι πρόχειρες ή ατελείς, αλλά λειτουργούν ως ουσιαστική γέφυρα προς την τυπική μαθηματική γνώση.

Παράδειγμα 2: Πάρκα νησιών

Οι μαθητές μπορούν να σχεδιάσουν:

- το περίγραμμα ενός πάρκου ως παραλληλόγραμμο ή σύνθετο σχήμα,
- τη διάταξη δέντρων ως πλέγμα,
- τα παρτέρια ως πολύγωνα.

Η μετάφραση του πραγματικού χώρου σε σχήματα και μοντέλα είναι η ουσία της οριζόντιας μαθηματικοποίησης.

Παράδειγμα 3: Προστασία αιγιαλού και παραλίας – Κτηματική Υπηρεσία του Δημοσίου

Η Κτηματική Υπηρεσία του Δημοσίου ελέγχει τα όρια αιγιαλού και παραλίας, εξετάζει αυθαίρετες κατασκευές και αξιολογεί εκτάσεις προς παραχώρηση. Αυτές οι διαδικασίες προσφέρουν αυθεντικά μαθηματικά προβλήματα, όπως:

- μετατροπή αεροφωτογραφιών σε διαγράμματα,
- εκτίμηση μήκους παράκτιας ζώνης,
- προσδιορισμός ορίων βάσει γεωμετρικών χαρακτηριστικών,
- υπολογισμός εμβαδού παράκτιας έκτασης πριν/μετά από καταπατήσεις.

Οι μαθητές μπορούν να εργαστούν με πραγματικού τύπου δεδομένα ώστε να δημιουργήσουν τα δικά τους μαθηματικά μοντέλα για τον χώρο, ακριβώς όπως συμβαίνει στην πραγματική διοικητική πρακτική.

#### β) Κάθετη μαθηματοποίηση (Vertical Mathematization)

Σε αυτό το στάδιο, οι μαθητές μεταβαίνουν από τις προσωπικές τους αναπαραστάσεις στις τυπικές μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες. Πρόκειται για τη «στρωματοποίηση» της μαθηματικής σκέψης, όπου οι αρχικές ιδέες εμπλουτίζονται, οργανώνονται και τυποποιούνται.

#### Παράδειγμα 1: Κρατήρας Νισύρου

Η κάθετη μαθηματοποίηση εκδηλώνεται όταν οι μαθητές:

- περνούν από την εκτίμηση της διαμέτρου στην ακριβή μέτρηση με χάρακα ή κλίμακα χάρτη,
- εφαρμόζουν τον τύπο της περιμέτρου για τον κύκλο,
- δημιουργούν ακριβέστερες αναπαραστάσεις του κρατήρα σε καρτεσιανό πλέγμα.

#### Παράδειγμα 2: Πάρκο νησιού

Μετάβαση από:

- πρόχειρα σκίτσα > σε ορθογώνιο πλέγμα,
- άτυπες μετρήσεις πλακιδίων > σε εφαρμογή τυπικών τύπων εμβαδού,
- προσωπικές συγκρίσεις > σε αναλογίες και ποσοστά.

#### Παράδειγμα 3: Αιγιαλός – Κτηματική Υπηρεσία του Δημοσίου

Οι μαθητές μπορούν να προσομοιώσουν διαδικασίες της Κτηματικής Υπηρεσίας, όπως:

- χρήση κλίμακας από επίσημο διάγραμμα αιγιαλού,
- υπολογισμό ακριβούς μήκους παραλίας με μαθηματικές τεχνικές,
- μετατροπή γεωγραφικών συντεταγμένων σε αποστάσεις,
- εφαρμογή τύπων εμβαδού για τον προσδιορισμό επιφάνειας του δημόσιου χώρου που καλύπτει μια αυθαίρετη κατασκευή.

Σε αυτό το σημείο, οι μαθητές κατανοούν όχι μόνο το «πώς», αλλά και το «γιατί» των μαθηματικών.

#### **Αλληλεπίδραση μεταξύ μαθητών και δασκάλου**

Η RME θεωρεί τη μαθηματική επικοινωνία ως βασικό συστατικό της μάθησης. Η τάξη λειτουργεί ως κοινότητα πρακτικής, όπου οι μαθητές συζητούν, επιχειρηματολογούν, αμφισβητούν και ανακατασκευάζουν τις ιδέες τους (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014).

#### Παράδειγμα Νισύρου

Οι μαθητές μπορεί να προσεγγίσουν τον κρατήρα διαφορετικά:

- κάποιιοι από φωτογραφία,
- κάποιιοι χρησιμοποιώντας κλίμακα χάρτη Google,
- άλλοι συγκρίνοντάς τον με το γήπεδο του χωριού.

Ο δάσκαλος δεν προσφέρει έτοιμες λύσεις, αλλά κατευθύνει τις μαθητικές στρατηγικές και ενισχύει την τεκμηρίωση των ιδεών.

#### Παράδειγμα κτηματικής υπηρεσίας

Η τάξη μπορεί να προσομοιώσει μια πραγματική διαδικασία ελέγχου αιγιαλού:

- Ομάδα Α υπολογίζει το μήκος παραλίας από χάρτη.
- Ομάδα Β εκτιμά το εμβαδόν της ζώνης όπου βρίσκεται μια αυθαίρετη κατασκευή.
- Ομάδα Γ υπολογίζει πόσο χώρο καταλαμβάνουν οι ομπρέλες – ξαπλώστρες σε σχέση με το επιτρεπτό όριο.

Στη συζήτηση που ακολουθεί, οι μαθητές καλούνται να δικαιολογήσουν τις μεθόδους τους, να συγκρίνουν τα επιχειρήματά τους και να βελτιστοποιήσουν τις λύσεις τους.

### **Σύνδεση άτυπης και τυπικής γνώσης**

Στην RME, η άτυπη γνώση δεν απορρίπτεται· αντίθετα, θεωρείται πολύτιμη πηγή κατανόησης. Οι προσωπικές στρατηγικές των μαθητών λειτουργούν ως αφετηρία για τη σταδιακή μετάβαση στην τυπική μαθηματική γνώση.

Παράδειγμα Νισύρου

Ένας μαθητής μετρά τη διάμετρο του κρατήρα «με βήματα». Αυτό μετατρέπεται σε μαθηματική μάθηση όταν:

- υπολογίζεται η μέση απόσταση ενός βήματος,
- γίνεται η μετατροπή >μέτρα > διάμετρος > περίμετρος.

Παράδειγμα κτηματικής υπηρεσίας

Αν ένας μαθητής υπολογίσει π.χ. πόσα «βήματα» απέχει μια κατασκευή από τη γραμμή του αιγιαλού, ο δάσκαλος μπορεί να οδηγήσει την τάξη:

- στη μετατροπή των βημάτων σε μέτρα,
- στη χρήση χαρτών με κλίμακα,
- στη σύγκριση με την επίσημη γραμμή αιγιαλού,
- στον υπολογισμό αν υπάρχει υπέρβαση της νόμιμης ζώνης.

Έτσι η άτυπη μέτρηση μετασχηματίζεται σε αυστηρή μαθηματική διαδικασία.

### **Χρήση αναπαραστάσεων και μοντέλων που αναπτύσσονται σταδιακά**

Οι αναπαραστάσεις αποτελούν θεμελιώδες εργαλείο της RME. Χαρτογραφήσεις, σκίτσα, διαγράμματα, πλέγματα, μοντέλα – όλα χτίζονται σταδιακά από τους ίδιους τους μαθητές.

Παράδειγμα Νισύρου

- πρόχειρο σχέδιο του κρατήρα,
- χρήση κλίμακας για πιο ακριβή διάσταση,
- διάγραμμα σε καρτεσιανό πλέγμα,
- εφαρμογή τύπων εμβαδού και περιμέτρου.

Παράδειγμα κτηματικής υπηρεσίας

Οι μαθητές μπορούν:

- να σχεδιάσουν την ακτογραμμή από αεροφωτογραφία,
- να τοποθετήσουν σημεία ως συντεταγμένες,
- να σχηματίσουν πολύγωνα που αναπαριστούν δημόσιες εκτάσεις,
- να υπολογίσουν εμβαδά και μεταβολές λόγω αυθαίρετων κατασκευών.

Αυτές οι αναπαραστάσεις μοιάζουν πολύ με τις πραγματικές διαδικασίες χαρτογράφησης που χρησιμοποιεί η Κτηματική Υπηρεσία. Η σταδιακή μετάβαση από απλές αναπαραστάσεις σε πιο σύνθετα μοντέλα ενισχύει τη μαθηματική κατανόηση και τη μεταγνωστική επίγνωση των μαθητών (Freudenthal, 1991).

### **Η συμβολή της RME στη μάθηση της Γεωμετρίας**

Η διεθνής βιβλιογραφία καταδεικνύει ότι οι μαθητές συναντούν έντονες δυσκολίες στη Γεωμετρία, ιδιαίτερα στη σύνδεση των εννοιών με ρεαλιστικές ή νοηματοδοτημένες καταστάσεις, στη διαχείριση χωρικών σχέσεων και στην εννοιολογική κατανόηση βασικών γεωμετρικών ιδιοτήτων (Aksu & Colak, 2019). Στο πλαίσιο αυτό, η RME έχει αποδειχθεί ιδιαίτερα αποτελεσματική, καθώς προσφέρει ένα μαθητοκεντρικό σύστημα διδασκαλίας που συνδέει τις γεωμετρικές έννοιες με προβλήματα που έχουν νόημα για τους μαθητές.

Η αξιοποίηση αυθεντικών προβλημάτων επιτρέπει την κατανόηση γεωμετρικών εννοιών όπως το εμβαδόν, ο όγκος, η αναλογία, η συμμετρία και οι μετασχηματισμοί. Μελέτες δείχνουν ότι όταν οι μαθητές

συμμετέχουν σε τέτοιες δραστηριότητες, αναπτύσσουν μεγαλύτερη αυτοπεποίθηση, επιδεικνύουν καλύτερη κατανόηση των σχέσεων και διατηρούν τη γνώση περισσότερο (Aksu & Colak, 2019).

Επιπλέον, ο σχεδιασμός μαθησιακών δραστηριοτήτων που επιτρέπουν στους μαθητές να χρησιμοποιούν πολλαπλές αναπαραστάσεις (σχήματα, διαγράμματα, μοντέλα, υπολογιστικές προσεγγίσεις) ενισχύει την εννοιολογική κατανόηση και τη μαθηματική επικοινωνία (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014).

### **Επίλυση προβλήματος και RME**

Η επίλυση προβλήματος αποτελεί κεντρικό στόχο της σύγχρονης μαθηματικής εκπαίδευσης. Η RME υποστηρίζει ότι η επίλυση προβλήματος πρέπει να ξεκινά από καταστάσεις που έχουν νόημα για τον μαθητή, πριν προχωρήσει σε τυπικές διατυπώσεις (Freudenthal, 1991). Μελέτες δείχνουν ότι όταν η διαδικασία αυτή ακολουθείται συστηματικά, οι μαθητές αναπτύσσουν περισσότερες στρατηγικές, επιδεικνύουν ευελιξία στη σκέψη και μπορούν να διατυπώσουν αιτιολογημένες λύσεις (Da, 2023). Επιπλέον, η RME ενισχύει τη μεταγνωστική παρακολούθηση των μαθητών, καθώς τους οδηγεί στη συνεχή αναστοχαστική διερεύνηση των στρατηγικών τους.

### **Αυθεντικά προβλήματα και σχολική πραγματικότητα**

Η χρήση αυθεντικών προβλημάτων αποτελεί κεντρικό πυλώνα της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης και διαφοροποιεί τη συγκεκριμένη προσέγγιση από τις παραδοσιακές διδακτικές πρακτικές. Ένα πρόβλημα χαρακτηρίζεται αυθεντικό όταν έχει νόημα για τους μαθητές, όταν συνδέεται με εμπειρίες, παρατηρήσεις ή πολιτισμικά στοιχεία του περιβάλλοντός τους, και όταν επιτρέπει μια μαθηματική διερεύνηση που αναδύεται φυσικά από το περιεχόμενο της κατάστασης (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014). Δεν χρειάζεται το φαινόμενο να είναι καθημερινό ή απολύτως πραγματικό· μπορεί να είναι φανταστικό αλλά πειστικό, αρκεί να ενεργοποιεί τη φαντασία και τη σκέψη των μαθητών και να τους οδηγεί σε νοηματοδοτημένη μαθηματική δραστηριότητα.

### **Αυθεντικά προβλήματα σε νησιωτικό περιβάλλον: Η περίπτωση της Νισύρου**

Η ελληνική νησιωτική πραγματικότητα προσφέρει εξαιρετικά πλούσια παραδείγματα αυθεντικών προβλημάτων που μπορούν να στηρίξουν τη διδασκαλία της Γεωμετρίας. Το ηφαίστειο της Νισύρου αποτελεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα. Η εικόνα του κρατήρα Στέφανου, με το σχεδόν κυκλικό του σχήμα, η ποικιλία των διαδρομών γύρω από το ηφαιστειακό πεδίο και τα άνισα βάθη του κρατήρα, δημιουργούν ένα σύνολο από γεωμετρικά προβλήματα που δεν είναι κατασκευασμένα, αλλά αναδύονται από ένα πραγματικό τοπίο που πολλοί μαθητές έχουν επισκεφθεί ή γνωρίζουν.

Ένα αυθεντικό πρόβλημα θα μπορούσε να ξεκινά με μια απλή αλλά ισχυρή ερώτηση:

«Αν θέλαμε να τοποθετήσουμε ένα προστατευτικό κιγκλίδωμα γύρω από το χείλος του κρατήρα, πώς θα υπολογίζαμε το μήκος του;»

Η ερώτηση αυτή δεν παρουσιάζει από την αρχή τύπους ή μεθόδους. Ζητά από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν τα δικά τους εργαλεία: εκτίμηση, σύγκριση, αναλογίες, χρήση εικόνας ή χάρτη, μετατροπές μονάδων.

Άλλο παράδειγμα μπορεί να αφορά τα ηφαιστειακά μονοπάτια:

«Αν το μονοπάτι από την είσοδο του πάρκου μέχρι τον κρατήρα έχει κλίση 9%, πόσο αυξάνεται το υψόμετρο κάθε 100 μέτρα;»

Εδώ τα μαθηματικά δεν είναι «πρόσχημα». Βρίσκονται στην καρδιά της εμπειρίας: αν κάποιος περπατήσει το μονοπάτι, θα συναντήσει την κλίση, την απόσταση, το ύψος, τη διαδρομή. Τέτοιες δραστηριότητες επιτρέπουν τη σύνδεση μαθηματικών εννοιών—όπως περιμέτρους, εμβαδά, λόγους και αναλογίες, γραφικές αναπαραστάσεις—με βιωματικές ή πολιτισμικά οικείες καταστάσεις. Αυτή η σύνδεση ενισχύει την εννοιολογική κατανόηση και αυξάνει σημαντικά το ενδιαφέρον των μαθητών (Aksu & Colak, 2019).

### **Αυθεντικά προβλήματα σε τοπικά περιβάλλοντα: Πάρκα, πλατείες, διαδρομές**

Πέρα από το ηφαίστειο της Νισύρου, πολλά νησιωτικά τοπία προσφέρουν αυθεντικές μαθηματικές καταστάσεις. Για παράδειγμα:

- Το σχήμα και η οργάνωση ενός πάρκου σε νησί, όπως το πάρκο της Ρόδου ή της Σύρου.
- Η διάταξη των παρτεριών, που δημιουργούν ορθογώνια και τραπεζοειδή σχήματα.
- Οι πέτρινες διαδρομές που παρουσιάζουν κλίσεις και εναλλαγές επιπέδων.
- Η γεωμετρία των παραλιακών πεζοδρομίων με πλακοστρώσεις σε μοτίβα.

Ένα αυθεντικό πρόβλημα μπορεί να αξιοποιήσει τη διάταξη μιας παιδικής χαράς:

«Αν θέλαμε να τοποθετήσουμε συνθετικό χλοοτάπητα στο δάπεδο της παιδικής χαράς, πώς θα υπολογίζαμε την ποσότητα του υλικού;»

Η ερώτηση δεν προϋποθέτει την άμεση εφαρμογή τύπων, αλλά μια ολόκληρη διαδικασία:

- Αναγνώριση σχήματος του χώρου (ορθογώνιο, σύνθετο σχήμα).
- Διάσπαση σε μικρότερα σχήματα.
- Εκτίμηση διαστάσεων (με βήματα ή με μέτρο).
- Υπολογισμός εμβαδού.
- Σύγκριση τιμών υλικών.

Το πρόβλημα είναι πραγματικό, πειστικό, και οδηγεί φυσικά σε μαθηματικοποίηση.

### **Η σχολική πραγματικότητα στην Ελλάδα: Περιορισμοί και ευκαιρίες**

Στο ελληνικό σχολείο, η χρήση αυθεντικών προβλημάτων παραμένει περιορισμένη. Τα περισσότερα προβλήματα στα σχολικά εγχειρίδια είναι τυποποιημένα, με αξίες προκαθορισμένες και συχνά αποκομμένες από τις εμπειρίες των μαθητών. Αυτή η προσέγγιση εμποδίζει την ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης και δυσκολεύει τη μετάβαση από την άτυπη σκέψη στη μαθηματική γενίκευση (Freudenthal, 1991). Η RME προτείνει ακριβώς την αντίστροφη πορεία: οι μαθητές να ξεκινούν από το πραγματικό προς το τυπικό, και όχι το αντίστροφο.

Αυτό δεν απαιτεί ακραία καινοτομία· μικρές αλλαγές αρκούν:

- χρήση φωτογραφιών από το νησί,
- παρατήρηση πραγματικών διαδρομών,
- ανάλυση τοπικών χαρτών,
- προσομοιώσεις με βάση συγκεκριμένα τοπία,
- δημιουργία μικρών projects βασισμένων στο περιβάλλον.

Η ενσωμάτωση αυθεντικών προβλημάτων συνδέεται διεθνώς με καλύτερα μαθησιακά αποτελέσματα, υψηλότερη παρακίνηση και αυξημένη μαθηματική αυτοπεποίθηση (Da, 2023). Επομένως, η RME μπορεί να υποστηρίξει μια ουσιαστική ανανέωση της γεωμετρικής διδασκαλίας στην Ελλάδα, ειδικά σε περιοχές όπου το φυσικό περιβάλλον προσφέρει πλούσιο, προσβάσιμο υλικό.

### **Σκοπός της έρευνας**

Ο σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να διερευνήσει τη συμβολή της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης (RME) στην ανάπτυξη των μαθηματικών δεξιοτήτων μαθητών Γυμνασίου, μέσω της αξιοποίησης αυθεντικών προβλημάτων στη Γεωμετρία, στο πλαίσιο μιας έρευνας δράσης.

Η έρευνα αποσκοπεί:

- να εξετάσει πώς οι μαθητές αλληλεπιδρούν με γεωμετρικές έννοιες μέσα από RME δραστηριότητες,
- να διερευνήσει πώς η RME επηρεάζει την επίλυση προβλήματος,
- να εντοπίσει αλλαγές στις διδακτικές πρακτικές της εκπαιδευτικού,
- να κατανοήσει την επίδραση της προσέγγισης στην εμπλοκή και την αυτοπεποίθηση των μαθητών.

Ερευνητικά ερωτήματα

- Πώς συμβάλλει η Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση στην ανάπτυξη των μαθηματικών δεξιοτήτων μαθητών Γυμνασίου στη Γεωμετρία;
- Πώς η αξιοποίηση αυθεντικών προβλημάτων επηρεάζει την εννοιολογική κατανόηση των μαθητών;
- Πώς διαμορφώνονται οι στρατηγικές επίλυσης προβλήματος των μαθητών στο πλαίσιο της RME;
- Πώς μεταβάλλονται οι διδακτικές πρακτικές της εκπαιδευτικού μέσα από την εφαρμογή της έρευνας δράσης;
- Πώς αντιλαμβάνονται οι μαθητές τη μαθησιακή διαδικασία μέσα από τις δραστηριότητες RME;

## **Μεθοδολογία**

### **Ερευνητικός σχεδιασμός: Έρευνα δράσης**

Η παρούσα έρευνα υιοθετεί το μοντέλο της έρευνας δράσης, καθώς πρόκειται για μια προσέγγιση που επιτρέπει στον εκπαιδευτικό-ερευνητή να διερευνήσει συστηματικά τη δική του διδακτική πρακτική με στόχο τη βελτίωση της μάθησης των μαθητών. Η έρευνα δράσης εστιάζει στην κυκλική διαδικασία σχεδιασμού – εφαρμογής – παρατήρησης – αναστοχασμού, επιτρέποντας την προοδευτική τροποποίηση των διδακτικών παρεμβάσεων. Η επιλογή αυτής της μεθοδολογίας δικαιολογείται από τον ίδιο τον πυρήνα της RME, η οποία θεωρεί τη διδασκαλία μια δυναμική, εξελισσόμενη διαδικασία που απαιτεί συνεχή προσαρμογή, αναστοχασμό και αλληλεπίδραση (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014). Η έρευνα δράσης επιτρέπει στον εκπαιδευτικό όχι μόνο να αξιολογήσει την αποτελεσματικότητα των παρεμβάσεων, αλλά και να κατανοήσει πώς οι μαθητές σκέφτονται, αλληλεπιδρούν και μαθαίνουν μέσα από δραστηριότητες RME.

Η μεθοδολογία ακολουθεί το κυκλικό μοντέλο των Kemmis & McTaggart, που περιλαμβάνει τα στάδια:

- Σχεδιασμός (planning)
- Δράση (acting)
- Παρατήρηση (observing)
- Αναστοχασμός (reflecting)

Κάθε κύκλος της έρευνας οδηγεί σε πιθανές τροποποιήσεις και επανασχεδιασμό των παρεμβάσεων, σύμφωνα με τα δεδομένα που συλλέγονται.

### **Πλαίσιο της έρευνας**

Η έρευνα θα διεξαχθεί σε τάξη Γυμνασίου, με μαθητές ηλικίας 12–14 ετών, σε δημόσιο σχολείο. Η επιλογή του πλαισίου συνδέεται με:

- τις αυξανόμενες δυσκολίες των μαθητών στη Γεωμετρία (Aksu & Colak, 2019),
- την ανάγκη εφαρμογής καινοτόμων προσεγγίσεων στη διδασκαλία,
- την καταλληλότητα της ηλικίας για την ενίσχυση δεξιοτήτων επίλυσης προβλήματος.

Η παρέμβαση θα έχει διάρκεια 8–10 εβδομάδων, περιλαμβάνοντας διαδοχικές δραστηριότητες RME με εστίαση σε βασικές γεωμετρικές έννοιες, όπως εμβαδά, όγκοι, συμμετρίες και σχέσεις μεταξύ σχημάτων.

### **Συμμετέχοντες**

Οι συμμετέχοντες θα είναι μία τάξη Γυμνασίου (περίπου 20–25 μαθητές). Η επιλογή γίνεται με βάση τη διαθεσιμότητα και τη δυνατότητα πρόσβασης της εκπαιδευτικού.

Τα χαρακτηριστικά της ομάδας θα καταγραφούν ανώνυμα και θα περιλαμβάνουν βασικά δημογραφικά στοιχεία (φύλο, ηλικία) καθώς και σύντομη περιγραφή των μαθησιακών χαρακτηριστικών της τάξης. Η συμμετοχή των μαθητών θα γίνει με έγκριση των γονέων και με πλήρη ανωνυμία, σύμφωνα με τις αρχές δεοντολογίας.

### **Διδακτική παρέμβαση**

Η διδακτική παρέμβαση βασίζεται στη σχεδίαση και υλοποίηση αυθεντικών μαθηματικών δραστηριοτήτων σύμφωνα με τις αρχές της RME (Freudenthal, 1991). Κάθε δραστηριότητα θα περιλαμβάνει:

- Μια αυθεντική προβληματική κατάσταση, νοητικά προσιτή στους μαθητές.

- Προοδευτική after-mathematization, όπου οι μαθητές θα καλούνται να μοντελοποιήσουν και να αναπτύξουν στρατηγικές.
- Ανακαλυπτικές διαδικασίες, μέσα από συζήτηση, συνεργατική εργασία και ανταλλαγή στρατηγικών.
- Μετάβαση σε τυπικές γεωμετρικές έννοιες μέσω μαθηματικοποίησης.

Παραδείγματα δραστηριοτήτων περιλαμβάνουν:

- Υπολογισμό εμβαδού μέσα από σχέδιο κήπου,
- Υπολογισμό περιμέτρου μέσα από χαρτογράφηση διαδρομής,
- Αναγνώριση σχημάτων μέσα από φωτογραφίες πραγματικών αντικειμένων,
- Κατασκευή μοντέλων για όγκο και χωρητικότητα.

Όλες οι δραστηριότητες θα αναπτυχθούν με βάση τη βιβλιογραφία RME και τα επίπεδα μαθηματικοποίησης.

### **Ερευνητικά εργαλεία**

Για τη συλλογή δεδομένων θα αξιοποιηθεί ποικιλία εργαλείων, προκειμένου να αποτυπωθούν:

- οι στρατηγικές των μαθητών,
- η εξέλιξη της εννοιολογικής κατανόησης,
- οι αλλαγές στις διδακτικές πρακτικές,
- καθώς και οι απόψεις και αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με τη μάθηση μέσω RME.

### **Φύλλα εργασίας (Worksheets)**

Τα φύλλα εργασίας αποτελούν βασικό εργαλείο συλλογής δεδομένων, καθώς περιλαμβάνουν τις απαντήσεις των μαθητών, τις στρατηγικές τους και την ικανότητά τους να μοντελοποιήσουν και να επιχειρηματολογήσουν.

### **Παρατήρηση τάξης**

Η εκπαιδευτικός θα πραγματοποιήσει συστηματική παρατήρηση κατά τη διάρκεια της υλοποίησης των δραστηριοτήτων. Θα καταγράφονται:

- οι αλληλεπιδράσεις,
- οι στρατηγικές των μαθητών,
- οι δυσκολίες,
- και ο βαθμός εμπλοκής.

Η παρατήρηση ευθυγραμμίζεται με την ανάγκη καταγραφής των μαθηματικών διαδικασιών και της συμμετοχής των μαθητών στην RME (Da, 2023). Στο πλαίσιο της έρευνας δράσης αξιοποιήθηκαν τρία βασικά εργαλεία συλλογής δεδομένων, καθένα από τα οποία συνέβαλε με διαφορετικό τρόπο στη σε βάθος κατανόηση της διδακτικής παρέμβασης και της μαθησιακής πορείας των μαθητών. Πρώτο και κεντρικό εργαλείο αποτέλεσε το ημερολόγιο του εκπαιδευτικού. Σε αυτό καταγραφόταν συστηματικά ο σχεδιασμός κάθε μαθήματος, οι στόχοι και οι προβλεπόμενες δραστηριότητες, καθώς και οι προσαρμογές που κρίνονταν αναγκαίες κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Μετά από κάθε μάθημα ο εκπαιδευτικός προχωρούσε σε αναστοχασμό, καταγράφοντας τι λειτούργησε αποτελεσματικά, ποιες δυσκολίες αναδύθηκαν, πώς ανταποκρίθηκαν οι μαθητές και ποιες αλλαγές έπρεπε να γίνουν στα επόμενα βήματα. Το ημερολόγιο, επομένως, δεν λειτουργούσε μόνο ως μέσο καταγραφής γεγονότων, αλλά ως εργαλείο συνεχούς βελτίωσης της διδακτικής πρακτικής και κατανόησης της δυναμικής της τάξης. Παράλληλα, πραγματοποιήθηκαν ημιδομημένες συνεντεύξεις με επιλεγμένους μαθητές, με στόχο να διερευνηθούν οι προσωπικές τους αντιλήψεις σχετικά με τις δραστηριότητες RME, την εμπλοκή τους στη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων και τις πιθανές αλλαγές στη μαθηματική τους κατανόηση. Η ημιδομημένη φύση των συνεντεύξεων επέτρεψε τη διατήρηση ενός βασικού πλαισίου ερωτήσεων, δίνοντας όμως ταυτόχρονα τη δυνατότητα στους μαθητές να εκφράσουν ελεύθερα τις σκέψεις, τις εμπειρίες και τις δυσκολίες τους, προσφέροντας πολύτιμα ποιοτικά δεδομένα που δεν θα μπορούσαν να αποτυπωθούν μόνο μέσω παρατήρησης.

Τέλος, σημαντικό εργαλείο αποτέλεσε το μαθητικό portfolio, το οποίο παρείχε μια πλούσια και αναλυτική εικόνα της μαθησιακής εξέλιξης των μαθητών σε βάθος χρόνου. Το portfolio περιελάμβανε φύλλα εργασίας, φωτογραφίες από δραστηριότητες, αποσπάσματα από μαθητικές συζητήσεις, καθώς και χαρακτηριστικές μαθηματικές στρατηγικές και σκέψεις που οι μαθητές ανέπτυξαν κατά τη διάρκεια της παρέμβασης. Μέσω του portfolio έγινε δυνατή η συστηματική αποτύπωση των αλλαγών στις αντιλήψεις και στις στρατηγικές των μαθητών, επιτρέποντας τη διαμόρφωση μιας ολιστικής εικόνας της μαθησιακής τους πορείας.

Συνολικά, ο συνδυασμός των τριών εργαλείων παρείχε πλούσιο και πολυεπίπεδο υλικό, ενισχύοντας την αξιοπιστία της έρευνας και επιτρέποντας μια βαθύτερη κατανόηση τόσο της διδασκαλίας όσο και της μαθησιακής εμπειρίας μέσα στο πλαίσιο των δραστηριοτήτων RME.

### **Διαδικασία συλλογής δεδομένων**

Η διαδικασία θα εξελιχθεί σε τρεις φάσεις:

#### **Φάση 1: Προκαταρκτική διερεύνηση και σχεδιασμός**

Η πρώτη φάση αποτελεί το θεμέλιο της έρευνας και περιλαμβάνει τη μελέτη του μαθησιακού περιβάλλοντος, των αναγκών των μαθητών και των απαιτήσεων του Αναλυτικού Προγράμματος. Αρχικά πραγματοποιείται μια επισκόπηση του επιπέδου της τάξης στη Γεωμετρία, η οποία μπορεί να περιλαμβάνει ανάλυση προηγούμενων εργασιών, διαγνωστικές ασκήσεις ή σύντομες συζητήσεις με τους μαθητές. Στόχος είναι ο εντοπισμός βασικών δυσκολιών, κενών κατανόησης και χαρακτηριστικών μαθηματικών στρατηγικών που χρησιμοποιούν ήδη οι μαθητές.

Στη συνέχεια, πραγματοποιείται αναλυτική μελέτη του σχετικού κεφαλαίου στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών, ώστε να προσδιοριστούν οι μαθησιακοί στόχοι, τα προσδοκώμενα αποτελέσματα και οι διδακτικές κατευθύνσεις. Αυτή η ανάλυση επιτρέπει τον ευθυγραμμισμένο σχεδιασμό δραστηριοτήτων που όχι μόνο συμβαδίζουν με το πρόγραμμα αλλά και αξιοποιούν τις αρχές του RME.

Με βάση τα παραπάνω δεδομένα, ακολουθεί ο σχεδιασμός των δραστηριοτήτων RME, οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν στην παρέμβαση. Οι δραστηριότητες διαμορφώνονται ώστε να ξεκινούν από ρεαλιστικές, νοηματοδοτημένες καταστάσεις, να προσκαλούν τους μαθητές να αναπτύξουν μοντέλα και προσωπικές στρατηγικές, και να ενισχύουν την προοδευτική μαθηματικοποίηση. Στο στάδιο αυτό καθορίζονται επίσης τα υλικά, η δομή κάθε μαθήματος, και οι μέθοδοι παρατήρησης και καταγραφής.

#### **Φάση 2: Υλοποίηση**

Η δεύτερη φάση αφορά την εφαρμογή της διδακτικής παρέμβασης στο σχολικό πλαίσιο. Οι σχεδιασμένες δραστηριότητες υλοποιούνται σε 8–10 διαδοχικά μαθήματα, ώστε να υπάρχει συνέπεια και συνεχής επαφή των μαθητών με τις αρχές του RME. Κατά τη διάρκεια κάθε μαθήματος ο εκπαιδευτικός παρατηρεί με συστηματικό τρόπο τις στρατηγικές των μαθητών, τη συμμετοχή τους, τις δυσκολίες που αναδύονται και τις μαθηματικές συζητήσεις που διαμορφώνονται. Παράλληλα, πραγματοποιείται συνεχής καταγραφή δεδομένων, τόσο μέσα από το ημερολόγιο του εκπαιδευτικού όσο και μέσω δομημένων εργαλείων παρατήρησης. Η συλλογή δεδομένων είναι πολυτροπική: περιλαμβάνει φύλλα εργασίας των μαθητών, υλικό από τα μαθητικά portfolios, καθώς και ημιδομημένες συνεντεύξεις, που προσφέρουν σε βάθος πληροφορίες για τις αντιλήψεις, τις στρατηγικές και τις σκέψεις των μαθητών. Αυτή η πολυεπίπεδη συλλογή υλικού εξασφαλίζει ότι η ανάλυση θα στηριχθεί σε πλούσια και αξιόπιστα δεδομένα.

#### **Φάση 3: Αναστοχασμός και ανάλυση**

Μετά την ολοκλήρωση της παρέμβασης, η τρίτη φάση επικεντρώνεται στον συστηματικό αναστοχασμό και στην εμπειριστατωμένη ανάλυση των δεδομένων. Αρχικά, το υλικό οργανώνεται και κατηγοριοποιείται, ώστε να είναι δυνατή η συγκριτική και θεματική επεξεργασία του. Στη συνέχεια, αναλύονται οι στρατηγικές που ανέπτυξαν οι μαθητές, τα λάθη που εμφανίστηκαν, οι μορφές μαθηματικοποίησης που υιοθέτησαν και τα μοντέλα που χρησιμοποίησαν κατά την επίλυση των προβλημάτων. Η ανάλυση επικεντρώνεται επίσης στον εντοπισμό επιτυχιών και δυσκολιών που προέκυψαν κατά την εφαρμογή της παρέμβασης. Καταγράφονται τόσο τα θετικά στοιχεία που συνέβαλαν στη μάθηση όσο και οι αναδυόμενες προκλήσεις που απαιτούν περαιτέρω διερεύνηση. Τέλος, μέσα από διαδικασία αναστοχασμού, τα ευρήματα οδηγούν

στον επανασχεδιασμό των επόμενων κύκλων της έρευνας δράσης, επιτρέποντας τη βελτίωση των δραστηριοτήτων, των μεθόδων διδασκαλίας και της προσέγγισης συνολικά.

### **Μέθοδος ανάλυσης δεδομένων (αναλυμένη εκδοχή)**

Για την επεξεργασία των δεδομένων της έρευνας θα εφαρμοστεί η ποιοτική ανάλυση περιεχομένου, μια μεθοδολογική προσέγγιση που επιτρέπει τη συστηματική και σε βάθος διερεύνηση των μαθητικών στρατηγικών, των αντιλήψεων και της μαθηματικής σκέψης που αναδύεται μέσα από τις δραστηριότητες RME. Η ανάλυση θα πραγματοποιηθεί μέσω διαδικασίας κωδικοποίησης και κατηγοριοποίησης, με στόχο την αναγνώριση μοτίβων, δομών και εννοιολογικών εξελίξεων.

Αρχικά, θα γίνει προσεκτική ανάγνωση και επανεξέταση του υλικού —φύλλα εργασίας, portfolios, αποσπάσματα συζητήσεων, συνεντεύξεις και σημειώσεις από το ημερολόγιο του εκπαιδευτικού— ώστε να αποκτηθεί συνολική εικόνα του μαθησιακού περιβάλλοντος. Στη συνέχεια, θα ακολουθήσει η διαδικασία της ανοιχτής κωδικοποίησης, όπου θα εντοπιστούν και θα επισημανθούν βασικά στοιχεία που σχετίζονται με:

- τις μαθηματικές στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές (π.χ. σχεδιασμός μοντέλων, αριθμητικές προσεγγίσεις, γεωμετρικός συλλογισμός),
- τα συνηθισμένα ή επίμονα λάθη, τα οποία αποτελούν δείκτες των γνώσεων αλλά και των παρανοήσεων των μαθητών,
- τις εννοιολογικές κατηγορίες που εμφανίζονται κατά την πορεία επίλυσης προβλημάτων,
- τα στοιχεία μαθηματοποίησης, όπως η μετάβαση από ρεαλιστικό πρόβλημα σε μαθηματικό μοντέλο, η γενίκευση ή η αναπαράσταση,
- και τις μαθητικές αντιλήψεις σχετικά με το νόημα των δραστηριοτήτων, τη δυσκολία τους και τον τρόπο που αυτά τα καθήκοντα επηρεάζουν την κατανόηση της Γεωμετρίας.

Η κωδικοποίηση θα γίνει τόσο επαγωγικά, επιτρέποντας στις κατηγορίες να προκύψουν από τα ίδια τα δεδομένα, όσο και αφαιρετικά, στηριζόμενη σε θεωρητικά πλαίσια της RME.

Κεντρικό αναλυτικό εργαλείο θα αποτελέσουν τα μοντέλα μαθηματοποίησης του Freudenthal (1991), τα οποία διακρίνουν τη διαδικασία επίλυσης σε στάδια όπως η οριζόντια και η κάθετη μαθηματοποίηση. Η αξιοποίηση αυτού του πλαισίου επιτρέπει την αναγνώριση της πορείας των μαθητών από το ρεαλιστικό πλαίσιο προς τη μαθηματική γενίκευση, καθώς και την ανάλυση του τρόπου με τον οποίο αναπτύσσουν προσωπικά μοντέλα που εξελίσσονται σε πιο τυπικά μαθηματικά μοντέλα. Παράλληλα, θα ληφθούν υπόψη οι κατηγορίες εκπαιδευτικής αλληλεπίδρασης που προτείνουν οι Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers (2014), οι οποίες αφορούν τη φύση της συζήτησης, τις μορφές καθοδήγησης του εκπαιδευτικού, τις μαθητικές παρεμβάσεις και τον βαθμό διερεύνησης που επιτυγχάνεται κατά τη διάρκεια των μαθησιακών δραστηριοτήτων. Οι κατηγορίες αυτές επιτρέπουν την κατανόηση του τρόπου με τον οποίο το διδακτικό περιβάλλον επηρεάζει τις αποφάσεις και τις μαθηματικές εξελίξεις των μαθητών. Η τελική φάση της ανάλυσης θα περιλαμβάνει τη σύνθεση των κωδικοποιημένων δεδομένων, την αναγνώριση θεματικών μοτίβων και τη διαμόρφωση συμπερασμάτων που συνδέουν τη μαθηματική πορεία των μαθητών με τη δομή και τη λειτουργία των δραστηριοτήτων RME. Μέσω αυτής της συστηματικής διαδικασίας θα αναδειχθούν τόσο οι ισχυρές πλευρές της παρέμβασης όσο και τα σημεία που απαιτούν περαιτέρω διερεύνηση ή βελτίωση.

### **Ηθικά ζητήματα**

Η έρευνα θα πραγματοποιηθεί με πλήρη σεβασμό στις αρχές δεοντολογίας:

- ανωνυμία συμμετεχόντων,
- συγκατάθεση γονέων και μαθητών,
- προστασία προσωπικών δεδομένων,
- ασφαλής φύλαξη των δεδομένων,
- διαφάνεια σκοπού και διαδικασίας.

### **Προκαταρκτικά συμπεράσματα**

Στο πρώτο στάδιο της ερευνητικής διαδικασίας, το οποίο περιλαμβάνει βιβλιογραφική ανασκόπηση, ανάλυση του θεωρητικού πλαισίου και αρχικό σχεδιασμό της παρέμβασης, προκύπτουν ορισμένα ουσιαστικά προκαταρκτικά συμπεράσματα που καθοδηγούν την επόμενη φάση της έρευνας. Παρότι η συλλογή δεδομένων δεν έχει ακόμη ξεκινήσει, η συστηματική μελέτη της διεθνούς βιβλιογραφίας και η ανάλυση των διδακτικών μοντέλων αποκαλύπτουν σημαντικές ενδείξεις για την αναμενόμενη συμβολή της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης (RME) στη μαθησιακή διαδικασία.

Ένα πρώτο συμπέρασμα αφορά τη φύση των δυσκολιών που παρουσιάζουν οι μαθητές στη Γεωμετρία. Με βάση τα ευρήματα των Aksu και Colak (2019), οι μαθητές συχνά αποτυγχάνουν όχι μόνο στην εφαρμογή γεωμετρικών τύπων, αλλά κυρίως στην κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών και των μεταξύ τους σχέσεων. Η έρευνα δείχνει ότι οι δυσκολίες αυτές συνδέονται με την αποσπασματικότητα της τυποκεντρικής διδασκαλίας και την απουσία αυθεντικών μαθησιακών εμπειριών. Η ανάλυση της βιβλιογραφίας επιβεβαιώνει επομένως την ανάγκη για διδακτικές προσεγγίσεις που επιτρέπουν στους μαθητές να οικοδομήσουν τη γνώση μέσα από νοηματοδοτημένες καταστάσεις.

Ένα δεύτερο προκαταρκτικό εύρημα αφορά τη συμβολή της RME στην επίλυση προβλήματος. Με βάση τα δεδομένα της μελέτης του Da (2023), η RME ενισχύει την ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων, καθώς οι μαθητές ενθαρρύνονται να δημιουργήσουν μοντέλα, να δοκιμάσουν υποθέσεις και να μεταβαίνουν σταδιακά προς την τυπική μαθηματική έκφραση. Το στοιχείο αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό για τη Γεωμετρία, όπου η επίλυση προβλήματος απαιτεί τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων, την κατανόηση χωρικών σχέσεων και την ανάπτυξη μαθηματικής ευελιξίας.

Ένα τρίτο συμπέρασμα αφορά την προοδευτική μαθηματικοποίηση, η οποία αναδεικνύεται ως κεντρικός μηχανισμός μάθησης. Η βιβλιογραφική μελέτη δείχνει ότι η μετάβαση από άτυπες στρατηγικές σε τυπικές μαθηματικές μορφές αποτελεί προϋπόθεση για την εννοιολογική κατανόηση (Freudenthal, 1991). Η RME προσφέρει ένα σαφές πλαίσιο καθοδήγησης αυτής της διαδικασίας, επιτρέποντας στους μαθητές να χρησιμοποιούν αρχικά προσωπικές, καθημερινές στρατηγικές και στη συνέχεια να τις μετασχηματίζουν σε μαθηματικές αναπαραστάσεις πιο γενικεύσιμες. Ένα ακόμη σημαντικό εύρημα αφορά τον ρόλο των αυθεντικών προβλημάτων. Η βιβλιογραφία καταδεικνύει σταθερά ότι τα αυθεντικά προβλήματα ενεργοποιούν τη μαθησιακή εμπλοκή, ενισχύουν την παρακίνηση και επιτρέπουν στους μαθητές να κατανοήσουν τη χρησιμότητα της Γεωμετρίας σε ποικίλες καταστάσεις (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014). Η ανάλυση των άρθρων που μελετήθηκαν αποκαλύπτει ότι η αυθεντικότητα δεν αφορά μόνο την πραγματικότητα, αλλά και την *παιδαγωγική αληθοφάνεια*—το κατά πόσο ένα πρόβλημα είναι νοητικά σημαντικό για τον μαθητή. Αυτό αποτελεί κρίσιμο στοιχείο για τον σχεδιασμό της παρέμβασης. Επιπλέον, η διερεύνηση της βιβλιογραφίας ανέδειξε σημαντικούς παράγοντες που πρέπει να ληφθούν υπόψη κατά την υλοποίηση της έρευνας δράσης. Οι αλλαγές στην πρακτική της εκπαιδευτικού, η αποτελεσματική οργάνωση της τάξης, η συστηματική παρατήρηση και η αναστοχαστική διαδικασία επιδρούν καθοριστικά στην ποιότητα της διδασκαλίας και, κατά συνέπεια, στα μαθησιακά αποτελέσματα. Τα πρώτα αυτά ευρήματα καθιστούν εμφανή την ανάγκη για ευελιξία, προσαρμοστικότητα και ενεργό συμμετοχή των μαθητών. Τέλος, από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση προκύπτει η ανάγκη για περαιτέρω μελέτη της εφαρμογής της RME στην ελληνική εκπαιδευτική πραγματικότητα, δεδομένου ότι οι σχετικές έρευνες παραμένουν περιορισμένες, ιδιαίτερα στο μάθημα της Γεωμετρίας. Η έλλειψη ερευνών αυτού του είδους καθιστά την παρούσα διδακτορική προσπάθεια ιδιαίτερα σημαντική, καθώς μπορεί να συμβάλει στη διαμόρφωση νέων διδακτικών πρακτικών και στην ενίσχυση της αποτελεσματικότητας της διδασκαλίας των μαθηματικών.

Συνολικά, τα προκαταρκτικά συμπεράσματα δείχνουν ότι η RME, με τον μαθητοκεντρικό χαρακτήρα της, την έμφαση στην αυθεντική μάθηση και τη συστηματική μαθηματικοποίηση, αποτελεί μια πολλά υποσχόμενη προσέγγιση για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας στο Γυμνάσιο. Τα συμπεράσματα αυτά θα αξιοποιηθούν για τον λεπτομερή σχεδιασμό των δραστηριοτήτων της παρέμβασης και για την οργάνωση του πρώτου κύκλου της έρευνας δράσης.

### **Αναμενόμενη συμβολή της έρευνας**

Η παρούσα έρευνα αναμένεται να συμβάλει σε πολλαπλά επίπεδα: στο πεδίο της διδακτικής των μαθηματικών, στη μαθησιακή διαδικασία των μαθητών του Γυμνασίου, στις διδακτικές πρακτικές της εκπαιδευτικού, καθώς και στη γενικότερη αξιοποίηση της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης (RME) στην ελληνική σχολική πραγματικότητα. Δεδομένου ότι οι σχετικές εφαρμογές της RME στην Ελλάδα είναι περιορισμένες, η έρευνα μπορεί να προσφέρει νέες γνώσεις και πρακτικές προτάσεις για την αξιοποίηση αυτής της προσέγγισης στη Γεωμετρία. Πρώτον, σε θεωρητικό επίπεδο, η έρευνα αναμένεται να εμπλουτίσει την κατανόηση της εφαρμογής της RME στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Παρότι η RME έχει αναπτυχθεί και τεκμηριωθεί διεθνώς (Freudenthal, 1991; Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014), η χρήση της στη Γεωμετρία του Γυμνασίου παραμένει υποεξερευνημένη. Η μελέτη αυτή θα προσφέρει εμπειρικά τεκμήρια σχετικά με το πώς οι μαθητές αλληλεπιδρούν με αυθεντικές γεωμετρικές καταστάσεις, πώς αναπτύσσουν στρατηγικές μέσω μαθηματοποίησης και πώς μεταβαίνουν από άτυπες σε τυπικές μαθηματικές μορφές. Με αυτόν τον τρόπο, η έρευνα θα συμβάλει στη διεθνή συζήτηση γύρω από την εννοιολογική ανάπτυξη στη Γεωμετρία. Δεύτερον, σε επίπεδο μαθησιακών αποτελεσμάτων, η παρέμβαση αναμένεται να ενισχύσει τις μαθηματικές δεξιότητες των μαθητών του Γυμνασίου, ενισχύοντας ιδιαίτερα την εννοιολογική κατανόηση και την ικανότητα επίλυσης προβληματικών καταστάσεων. Η διεθνής βιβλιογραφία έχει δείξει ότι η εμπλοκή σε αυθεντικά προβλήματα μπορεί να βελτιώσει σημαντικά τη μαθηματική κατανόηση και τη συγκράτηση της γνώσης (Aksu & Colak, 2019). Επιπλέον, η RME έχει αναδειχθεί ως ιδιαίτερα αποτελεσματική στην ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης προβλήματος και μεταγνωστικών δεξιοτήτων (Da, 2023). Η εφαρμογή της έρευνας αναμένεται να παράσχει δεδομένα για το κατά πόσο οι μαθητές αναπτύσσουν πιο ευέλικτες στρατηγικές και βαθύτερη κατανόηση των γεωμετρικών σχέσεων.

Τρίτον, η έρευνα αναμένεται να συμβάλει στη βελτίωση της διδακτικής πρακτικής της εκπαιδευτικού. Μέσα από τους κύκλους της έρευνας δράσης —σχεδιασμός, εφαρμογή, παρατήρηση και αναστοχασμός— η εκπαιδευτικός θα έχει τη δυνατότητα να αναγνωρίσει τα στοιχεία των παρεμβάσεων που λειτουργούν αποτελεσματικά, αλλά και τις δυσκολίες που προκύπτουν. Αυτό θα οδηγήσει σε διαμορφωτική βελτίωση των διδακτικών της πρακτικών και σε βαθύτερη κατανόηση των μαθητικών αναγκών. Τα ευρήματα της έρευνας μπορούν να αξιοποιηθούν στο μέλλον και από άλλους εκπαιδευτικούς που επιθυμούν να εντάξουν την RME στην τάξη τους.

Τέταρτον, η έρευνα αναμένεται να προσφέρει σημαντικά στοιχεία σχετικά με την εφαρμοσιμότητα και την προσαρμογή της RME στην ελληνική σχολική πραγματικότητα. Η έλλειψη σχετικών μελετών καθιστά δύσκολη την κατανόηση των παραγόντων που διευκολύνουν ή εμποδίζουν την υλοποίηση της RME στα ελληνικά σχολεία. Μέσα από τα δεδομένα της έρευνας δράσης, θα αναδειχθούν παράγοντες όπως οι μαθητικές αντιλήψεις, ο διαθέσιμος χρόνος, τα σχολικά εγχειρίδια, καθώς και οι διδακτικές ευκαιρίες ή περιορισμοί.

Τέλος, η έρευνα αναμένεται να συμβάλει στην ανάπτυξη ενός πρακτικού μοντέλου σχεδιασμού αυθεντικών γεωμετρικών δραστηριοτήτων για την τάξη του Γυμνασίου. Τα παραγόμενα φύλλα εργασίας, τα μοντέλα μαθηματοποίησης και οι στρατηγικές επίλυσης που θα συλλεχθούν μπορούν να αποτελέσουν βάση για υλικό που θα αξιοποιηθεί και από άλλους εκπαιδευτικούς, ενισχύοντας έτσι την επαγγελματική κοινότητα μάθησης. Συνολικά, η αναμενόμενη συμβολή της έρευνας ξεπερνά το επίπεδο της συγκεκριμένης τάξης και μπορεί να επηρεάσει μακροπρόθεσμα τη διδακτική της Γεωμετρίας, προωθώντας την υιοθέτηση της RME ως αποτελεσματικής και παιδαγωγικά τεκμηριωμένης προσέγγισης.

### **Συμπεράσματα**

Η παρούσα εργασία, ως πρώτο στάδιο της διδακτορικής πορείας, ανέδειξε τη θεωρητική θεμελίωση, τον μεθοδολογικό σχεδιασμό και τα βασικά ερευνητικά ερωτήματα που θα καθοδηγήσουν τη μελέτη σχετικά με τη συμβολή της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης (RME) στη διδασκαλία της Γεωμετρίας στο Γυμνάσιο. Μέσα από τη συστηματική βιβλιογραφική ανασκόπηση, διαπιστώθηκε ότι η RME αποτελεί μια συνεκτική, παιδαγωγικά τεκμηριωμένη και διεθνώς αναγνωρισμένη προσέγγιση, η οποία συνδέει τη μαθηματική γνώση με αυθεντικές, νοηματοδοτημένες καταστάσεις και ενισχύει τη μαθηματοποίηση, την επίλυση προβλήματος και την εννοιολογική κατανόηση (Freudenthal, 1991; Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014). Ταυτόχρονα, η διερεύνηση των μαθησιακών δυσκολιών των μαθητών στη Γεωμετρία

ανέδειξε την ανάγκη για διδακτικές πρακτικές που ξεπερνούν την τυποκεντρική διδασκαλία και προσφέρουν ευκαιρίες για ενεργή συμμετοχή, ανακαλυπτική μάθηση και αυθεντική εφαρμογή των μαθηματικών εννοιών. Η βιβλιογραφία επιβεβαιώνει ότι οι μαθητές συχνά δυσκολεύονται να μεταφράσουν γεωμετρικές έννοιες σε πραγματικά ή σχεδόν πραγματικά πλαίσια και να αναπτύξουν στρατηγικές επίλυσης προβλήματος (Aksu & Colak, 2019). Αυτές οι διαπιστώσεις ενισχύουν την καταλληλότητα της RME ως διδακτικής προσέγγισης που μπορεί να απαντήσει στις προκλήσεις αυτές.

Σε μεθοδολογικό επίπεδο, ο σχεδιασμός της έρευνας δράσης προσφέρει ένα ευέλικτο και αναστοχαστικό πλαίσιο για την εξερεύνηση της διδακτικής συμβολής της RME. Ο κυκλικός χαρακτήρας της έρευνας δράσης επιτρέπει τόσο την παρατήρηση και ανάλυση της μαθησιακής διαδικασίας όσο και τη σταδιακή βελτίωση της διδακτικής πρακτικής της εκπαιδευτικού. Η χρήση ποικιλίας εργαλείων συλλογής δεδομένων —όπως φύλλα εργασίας, παρατηρήσεις, συνεντεύξεις και portfolio— καθιστά δυνατή μια πολυδιάστατη προσέγγιση της μαθησιακής εμπειρίας και της εξέλιξης των μαθητών. Τα προκαταρκτικά συμπεράσματα της πρώτης φάσης της έρευνας υπογραμμίζουν τη δυναμική της RME και τη συμβατότητά της με τις ανάγκες της ελληνικής σχολικής πραγματικότητας. Παράλληλα, αναδεικνύουν την ανάγκη περαιτέρω έρευνας, καθώς η εφαρμογή της RME στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση —ιδιαίτερα στη Γεωμετρία— παραμένει περιορισμένη στον ελληνικό χώρο. Η παρούσα διδακτορική μελέτη στοχεύει να καλύψει αυτό το κενό, παρέχοντας εμπειρικά δεδομένα, πρακτικές προτάσεις και θεωρητική τεκμηρίωση για τη χρήση αυθεντικών προβλημάτων και διαδικασιών μαθηματοποίησης στη Γεωμετρία.

Συνολικά, η εργασία αυτή αποτελεί το θεμέλιο της ερευνητικής διαδικασίας που θα ακολουθήσει. Θέτει ένα σαφές θεωρητικό και μεθοδολογικό πλαίσιο, διατυπώνει ερευνητικά ερωτήματα που ανταποκρίνονται στις σύγχρονες ανάγκες της μαθηματικής εκπαίδευσης και προσδιορίζει τη σημασία της RME ως καινοτόμου προσέγγισης. Στα επόμενα στάδια της διδακτορικής έρευνας, η υλοποίηση της παρέμβασης και η ανάλυση των δεδομένων θα επιτρέψουν την εξαγωγή βαθύτερων συμπερασμάτων και ενδεχομένως την πρόταση νέων πρακτικών για την ενίσχυση της Γεωμετρίας στο Γυμνάσιο.

## Βιβλιογραφία

- Aksu, H. H., & Colak, S. O. (2021). *The effect of realistic mathematics education on student achievement in 8th grades geometric objects teaching. African Educational Research Journal, 9*(1), 20–31.
- Anjarwati, S., Adiwahyono, T., Adawiya, R., & Ariani, Y. D. (2025). Effectiveness of the realistic mathematics education (RME) approach in mathematics learning: A systematic literature review (2015–2023). *Atlantis Press*.
- Da, N. T. (2023). The effect of realistic mathematics education on the problem-solving competency of high school students through learning calculus topics. *Contemporary Mathematics and Science Education, 4*(1), ep23013.
- Fauzan, A. (2024). Realistic mathematics education (RME) to improve literacy and numeracy skills in elementary school students. *Infinity Journal, 12*.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Kluwer Academic Publishers.
- Kaymak, S., & Bagzhan, M. (2023). A bibliometric review on realistic mathematics education (RME) database between 2000–2022. *International Educational Review, 35*.
- Khairunnisak, C., et al. (2022). Teachers' understanding of realistic mathematics education (RME) through a blended workshop on designing RME-based learning. *International Journal in Science and Mathematics Education, 55*(3), 1–24.
- Nur Hakim, Apriyanto, Mardiaty, & Sitepu, E. (2024). Implementation of the realistic mathematics education (RME) approach in geometry learning in secondary schools. *Aksioma: Jurnal Matematika, 1*(3), 17–30.
- Realistic mathematics education approach on improving problem-solving skills of students. (2022). *Proceedings of the IIARI Conference* (Vol. 2.2, Article IRC22.228).
- Realistic mathematics education in digital era elementary schools. (2023). *IJASEIT*.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2014). Realistic mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 521–525). Springer.